

문제 풀이 과제

1. 504의 약수의 개수와 $3^x \times 7^2 \times 13^y$ 의 약수의 개수가 같다고 한다. 이때, $x - y$ 의 값을 구하여라. (단, x, y 는 $x > y$ 인 자연수) [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$ 이므로 약수의 개수가 같기 위해서는 $x = 3, y = 1$ 이어야 한다. ($\because x > y$)
 $\therefore x - y = 3 - 2 = 2$

2. 24에 가능한 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱해야 하는 자연수는? [배점 5, 중상]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

해설

$24 = 2^3 \times 3$ 이므로 제곱수가 되려면 $2 \times 3, 2^3 \times 3, 2^3 \times 3^3, \dots$ 을 곱해야 한다. 따라서 가장 작은 자연수는 6이다.

3. 가로 길이가 72cm, 세로 길이가 96cm, 높이가 120cm인 직육면체를 남김없이 잘라 똑같은 크기의 정육면체로 나누려고 한다. 되도록 적은 개수의 정육면체를 만들 때, 만들 수 있는 정육면체는 몇 개인지 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 60개

해설

72, 96, 120의 최대공약수는 24이므로 만들 수 있는 정육면체의 모서리의 길이는 (24의 약수)cm이다. 정육면체의 한 모서리의 길이가 길수록 정육면체의 개수는 적으므로 한 모서리의 길이는 24(cm)이다.

$\therefore$ (정육면체의 갯수)
 $= (72 \div 24) \times (96 \div 24) \times (120 \div 24)$
 $= 3 \times 4 \times 5 = 60(\text{개})$

4. 운동장에서 진수는 달리기 하고 성찬이는 자전거를 타고 있다. 한 바퀴 도는 데 진수는 1분 30초 걸리고 성찬이는 54초가 걸린다. 출발점에서 두 사람이 오전 10시에 동시에 출발했을 때, 그 다음 출발점에서 만나는 시각은? [배점 5, 중상]

① 10시 2분 10초 ② 10시 2분 50초

③ 10시 3분 20초 ④ 10시 3분 40초

⑤ 10시 4분 30초

해설

90, 54의 최소공배수는 270이므로 진수와 성찬이는 4분 30초마다 출발점에서 만난다.

따라서 10시에 동시에 출발했으므로 다음 동시에 출발하는 시각은 10시 4분 30초이다.

5. 세 자연수 54, 72, A 의 최대공약수가 6, 최소공배수가 216 일 때, 가장 큰 자연수 A 의 값은?

[배점 5, 중상]

- ① 12 ② 24 ③ 36 ④ 48 ⑤ 60

해설

$54 = 2 \times 3^3$, $72 = 2^3 \times 3^2$, A 에서
 최대공약수는 $6 = 2 \times 3$,
 최소공배수는 $216 = 2^3 \times 3^3$ 이므로
 A 는 2×3 을 소인수로 가져야 하고, 또한 3의
 지수는 1이어야 하므로
 A 의 값이 될 수 있는 것은 6, 12, 24이다.
 따라서, 가장 큰 자연수 A 의 값은 24이다.

6. 세 자연수 84, 126, A 의 최대공약수가 6, 최소공배수가 1260 일 때, 가장 작은 자연수 A 의 값을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 30

해설

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$, $126 = 2 \times 3^2 \times 7$, A 에서
 최대공약수는 $6 = 2 \times 3$,
 최소공배수는 $1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 이므로
 A 는 2×3 과 5를 인수로 반드시 가져야 한다.
 따라서, 가장 작은 자연수 $A = 2 \times 3 \times 5 = 30$
 이다.

7. 세 수 3×5^2 , $c^3 \times 3^a \times 5^2$, $2 \times 3 \times 5^b \times 7$ 의 최대공약수가 $d \times 5$ 이고, 최소공배수가 $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$ 일 때, $\frac{d}{c} - \frac{b}{a}$ 의 값을 구하면?

[배점 5, 중상]

- ① 0 ② 1 ③ 5 ④ 9 ⑤ 12

해설

최대공약수가 $d \times 5$,
 최소공배수가 $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$ 이므로
 $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$
 $\therefore \frac{d}{c} - \frac{b}{a} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$

8. $2^4 \times a \times 5^2$ 의 약수가 45개가 되기 위한 가장 작은 a 의 값은?

[배점 5, 상하]

- ① 2 ② 3 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$2^4 \times a \times 5^2$ 의 약수의 개수는
 $(4+1) \times (a\text{의 지수} + 1) \times (2+1) = 45$ 으로 계산된다. $(a\text{의 지수}) + 1 = 3$ 이 되어야 한다.
 그러므로 $9 = 3^2$ 이다.

9. $24 \times a$ 가 어떤 자연수 A 의 제곱이 될 때, A 의 최솟값은? [배점 5, 상하]

- ① 9 ② 12 ③ 36
④ 54 ⑤ 100

해설

$$24 \times a = 2^3 \times 3 \times a$$

$$\text{가장 작은 } a = 2 \times 3 = 6$$

$$A^2 = 2^3 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = (12)^2$$

$$\therefore A = 12$$

10. 5 자리의 오진수 $abc32_{(5)}$ 에 오진수 X 를 더하면 25로 나누어 떨어진다. 오진수 X 중 가장 작은 수를 십진법으로 나타내어라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 8

해설

$$abc32_{(5)} = a \times 5^4 + b \times 5^3 + c \times 5^2 + 3 \times 5 + 2$$

25로 나누어 떨어지기 위해서는 5^1 의 자리와 1의 자리가 0이어야 한다.

$$\therefore 13_{(5)} = 8$$

11. 이진수 중에서 1을 세 번 사용하는 수를 작은 순서대로 나열하면,

$111_{(2)}, 1011_{(2)}, 1101_{(2)}, 1110_{(2)}, 10011_{(2)}, 10101_{(2)}, 10110_{(2)} \dots$ 이 된다.

이때, 55 번째 나오는 이진수를 십진수로 나타내어라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 208

해설

$111_{(2)}, 1011_{(2)}, 1101_{(2)}, 1110_{(2)}, 10011_{(2)},$

$10101_{(2)}, 10110_{(2)} \dots$ 에서 볼 수 있듯이,

1을 3번만 사용한 세 자리 수 이진수 : 1개,

1을 3번만 사용한 네 자리 수 이진수 : 3개,

1을 3번만 사용한 다섯 자리 수 이진수 : 6개,

1을 3번만 사용한 여섯 자리 수 이진수 : 10개,

1을 3번만 사용한 일곱 자리 수 이진수 : 15개,

1을 3번만 사용한 여덟 자리 수 이진수 : 21개이므로,

55 번째 나오는 이진수는 1을 3번만 사용한 여덟 자리 수 이진수 중 두 번째로 큰 수이다.

$$\therefore 11010000_{(2)} = 208$$

12. 여섯 자리의 이진법의 수 $\bigcirc\bigcirc\bigcirc011_{(2)}$ 에 십진법의 수 n 을 더하면 8의 배수가 된다. n 의 최솟값을 구하여라. (단, $n > 0$) [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 5

해설

이진법의 수는 넷째 자리부터는 항상 8의 배수가 된다.

따라서 $\bigcirc\bigcirc\bigcirc011_{(2)}$ 에 n 을 더해서 8의 배수가 된다면 $011_{(2)}$ 에 n 을 더해도 8의 배수가 된다.

$$011_{(2)} = 3$$

$$\therefore n = 5$$

13. 자연수 a, b, c 에 대하여 $750a = 180b = c^2$ 이 성립할 때, c 의 최솟값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 150

해설

$750a = 2 \times 3 \times 5^3 \times a$, $180b = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times b$,
위 두 식이 가장 작은 c^2 의 형태가 되려면,
 $a = 2 \times 3 \times 5$, $b = 5^3$ 이어야 한다.
따라서,
 $c^2 = 2^2 \times 3^2 \times 5^4$
 $\therefore c = 150$

14. 1 부터 어떤 자연수 n 까지의 곱을 $n!$ 이라고 한다. $25!$ 을 계산하였을 때, 일의 자리부터 연속되어 나타나는 0 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6 개

해설

일의 자리부터 연속되어 나타나는 0 의 개수는 10 의 거듭제곱의 개수이다.
 $10 = 2 \times 5$ 이므로 $25!$ 에서 2×5 의 인수를 찾아 보면,
 $2 \times 4 \times 5 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 \times 14 \times 15 \times 16 \times 18 \times$
 $20 \times 22 \times 24 \times 25 = (2 \times 5)^6 \times a$
 $\therefore 25!$ 에서 일의 자리부터 연속되어 나타나는 0 의 개수 = 6 개

15. 양팔저울과 몇 개의 추로 364g 까지의 자연수 무게를 측정하려고 한다. 필요한 최소의 추의 개수는 몇 개인지 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6 개

해설

양팔저울은 오른쪽 저울에 올리는 경우, 왼쪽 저울에 올리는 경우, 올리지 않는 경우로 총 세 가지 경우가 가능하므로, 양팔저울을 이용한 무게 측정은 3 진법으로 나타낼 수 있다.
3 진법의 추는 1g, 3g, 9g, 27g, 81g, 243g, 729g, 등 이고, $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 364$ 이므로, 필요한 최소의 추는 6 개이다.

16. $\frac{cdb_{(4)}}{2} = aba_{(4)} = abc_{(4)} - 2$ 일 때, $abcd_{(4)}$ 를 십진법의 수로 나타내어라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 108

해설

$aba_{(4)} = abc_{(4)} - 2 \rightarrow a = c - 2$,
 a, b, c, d 는 모두 4 보다 작으므로 $c = 3$, $a = 1$,
 $\frac{3db_{(4)}}{2} = 1b1_{(4)} = 1b3_{(4)} - 2$,
 $\rightarrow 3db_{(4)} = 2 \times 1b1_{(4)}$,
 $\rightarrow 7b - 4d = 14$, $b = 2$, $d = 0$,
 $\therefore abcd_{(4)} = 1230_{(4)} = 108$

17. 0 부터 5 까지의 눈이 있는 정육면체 주사위를 세 번 던져, 나온 눈의 수를 순서대로 각각 x, y, z 라고 할 때, 6 진법의 수 $xyz_{(6)}$ 를 만들 수 있다. 이 수를 36 으로 나눈 나머지가 24 의 약수가 될 확률을 구하여라.
[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{9}$

해설

$xyz_{(6)} = x \times 6^2 + y \times 6 + z$, 24 의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 이다.

$x \times 6^2 + y \times 6 + z$ 에서 $x \times 6^2$ 부분은 항상 36 으로 나누어 떨어지므로, 나머지는 $y \times 6 + z$ 이다.

→ $6y + z$ 가 24 의 약수가 될 확률을 구해 보면

→ $6y + z = 1$, $(y, z) = (0, 1)$

→ $6y + z = 2$, $(y, z) = (0, 2)$

→ $6y + z = 3$, $(y, z) = (0, 3)$

→ $6y + z = 4$, $(y, z) = (0, 4)$

→ $6y + z = 6$, $(y, z) = (1, 0)$

→ $6y + z = 8$, $(y, z) = (1, 2)$

→ $6y + z = 12$, $(y, z) = (2, 0)$

→ $6y + z = 24$, $(y, z) = (4, 0)$

따라서 y, z 가 0 에서 5 까지 나올 경우는 36 이므로

$$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

18. 분수 $\frac{x}{y}$ 의 분모에 18 , 분자에 45 를 더해도 분수의 값은 변하지 않는다. x, y 의 최소공배수가 70 일 때, 자연수 x, y 를 각각 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 35$

▷ 정답 : $y = 14$

해설

$$\frac{x}{y} = \frac{x+45}{y+18}$$

$$\rightarrow x \times (y+18) = y \times (x+45)$$

$$\rightarrow 18x = 45y \rightarrow 2x = 5y$$

$$70 = 2 \times 5 \times 7 \text{ 이므로}$$

$$2x = 5y \text{ 를 만족하려면 } x = 35, y = 14 \text{ 이다.}$$

19. 두 자연수 p, q 의 최대공약수를 $[p, q]$ 로 정의할 때, $[[\frac{[p, p]}{[p, q]}, q], [\frac{[q, q]}{[p, q]}, p]]$ 를 간단히 하여라.
[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$[[\frac{[p, p]}{[p, q]}, q], [\frac{[q, q]}{[p, q]}, p]]$$

$$= [[\frac{p}{[p, q]}, q], [\frac{q}{[p, q]}, p]]$$

$$= [[\frac{p}{[p, q]}, q], [\frac{q}{[p, q]}, p]] \text{ (}\frac{p}{[p, q]}, q \text{는 서로소)}$$

$$= [1, 1]$$

$$= 1$$

20. 자연수 n 에 대하여 연속하는 5 개의 자연수의 곱을 $[n]$,
 n 의 약수의 개수를 $s(n)$ 로 정의한다. $\frac{s([n+1])}{s([n])} > 1$
 을 만족하는 10 보다 작은 자연수 n 을 모두 구하여라.
 [배점 6, 상중]

▶ 답 :
 ▶ 답 :
 ▶ 답 :
 ▶ 답 :
 ▶ 답 :
 ▶ 답 :

- ▷ 정답 : 1
 ▷ 정답 : 2
 ▷ 정답 : 3
 ▷ 정답 : 4
 ▷ 정답 : 5
 ▷ 정답 : 6
 ▷ 정답 : 8

해설

1 부터 13 까지 자연수를 소인수분해해보면
 $1, 2, 3, 4 = 2^2, 5, 6 = 2 \times 3, 7, 8 = 2^3,$
 $9 = 3^2, 10 = 2 \times 5, 11, 12 = 2^2 \times 3, 13$ 이다.
 $s([1]) = 16, s([2]) = 30, s([3]) = 56, s([4]) =$
 $112, s([5]) = 144, s([6]) = 96, s([7]) = 120,$
 $s([8]) = 112, s([9]) = 128$
 따라서, $\frac{s([n+1])}{s([n])} > 1$ 인 경우가 되는 n 의 값은
 1, 2, 3, 4, 6, 8 이다.

21. 어떤 자연수 x 를 소인수분해하였을 때, $x = a \times b \times c$
 이 된다. $(a+1)(b+1)(c+1) = 200$ 이 되는 세 자리
 자연수 x 를 모두 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 108

▷ 정답 : 112

해설

$200 = 2^3 \times 5^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5,$
 $2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$ 을 세 수의 곱으로 만들면,
 $\rightarrow 2 \times 2 \times 50, 2 \times 4 \times 25, 2 \times 5 \times 20, 2 \times 10 \times 10, 4 \times$
 $5 \times 10, 5 \times 5 \times 8$
 따라서,
 순서쌍 $(a, b, c) = (1, 1, 49), (1, 3, 24), (1, 4, 19),$
 $(1, 9, 9), (3, 4, 9), (4, 4, 7)$
 $\rightarrow a \times b \times c = 49, 72, 76, 81, 108, 112$
 $\therefore$ 세 자리 자연수 $x = 108, 112$

22. $2^a \times 3^b$ 의 약수의 개수가 6 개 일 때, $2^a \times 3^b$ 이 가장 작은 자연수가 되도록 하는 a, b 를 각각 구하여라.
[배점 6, 상상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 1$

해설

자연수 A 가 $A = a^m \times b^n$ 으로 소인수분해될 때 (A 의 약수의 개수)는 $(m+1) \times (n+1)$ 개 이다.

$$6 = 1 \times 6 = (0+1) \times (5+1)$$

$$= 6 \times 1 = (5+1) \times (0+1)$$

$$= 2 \times 3 = (1+1) \times (2+1)$$

$$= 3 \times 2 = (2+1) \times (1+1)$$

이므로, (a, b) 의 순서쌍으로 가능한 순서쌍은 모두 $(0, 5), (5, 0), (1, 2), (2, 1)$ 이다.

i) $(a, b) = (0, 5)$ 일 때,

구하고자 하는 수는 $2^0 \times 3^5 = 1 \times 3^5 = 243$ 이다.

ii) $(a, b) = (5, 0)$ 일 때,

구하고자 하는 수는 $2^5 \times 3^0 = 2^5 \times 1 = 32$ 이다.

iii) $(a, b) = (1, 2)$ 일 때,

구하고자 하는 수는 $2^1 \times 3^2 = 18$ 이다.

iv) $(a, b) = (2, 1)$ 일 때,

구하고자 하는 수는 $2^2 \times 3^1 = 12$ 이다.

따라서 i), ii) iii), iv) 에서 가장 작은 수는 12 이다.

23. 자연수 약수의 개수가 9 개인 어떤 수를 소인수분해했더니 $2^2 \times \square$ 가 되었다. $\square$ 안에 들어갈 가장 작은 수는 무엇인지 구하여라.
[배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$9 = 9 \times 1 = 3 \times 3$$

$$\text{i) } 9 = 8 + 1$$

$$2^2 \times \square = 2^8$$

$$\therefore \square = 2^6$$

$$\text{ii) } 9 = 3 \times 3 = (2+1) \times (2+1) \text{ 일 때,}$$

$$2^2 \times \square = 2^2 \times a^2 \text{ (단, } a \text{ 는 2 가 아닌 소수이다.)}$$

$$\therefore a = 3, 5, 7, \dots$$

$$\therefore \square = 9, 25, 49$$

i), ii) 에서 가장 작은 수는 9 이다.

24. $2^5 \leq N < 2^6$ 을 만족시키는 자연수 N 을 이진법의 수로 나타낼 때, 이진법으로 몇 자리의 수가 되는가?
[배점 6, 상상]

① 6 자리

② 5 자리

③ 4 자리

④ 3 자리

⑤ 2 자리

해설

$$2^5 = 100000_{(2)}, 2^6 = 1000000_{(2)} \text{ 이므로}$$

$$100000_{(2)} \leq N < 1000000_{(2)}$$

따라서 N 은 6 자리 수

25. 다음은 골드바흐가 생각해낸 소수에 관한 추측이다.
골드바흐의 추측을 설명한 것이 아닌 것은?

보기

[골드바흐의 추측]

2 보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다.

[배점 6, 상상]

- ① $12 = 5 + 7$ ② $14 = 3 + 11$
③ $16 = 5 + 11$ ④ $18 = 7 + 11$
⑤ $20 = 9 + 11$

해설

소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... 이므로 골드바흐의 추측을 설명한 것이 아닌 것은 $20 = 9 + 11$ 이다.

26. 다음은 골드바흐가 생각해 낸 소수에 관한 추측이다.
골드바흐의 추측을 가장 잘 설명하고 있는 식은?

보기

[골드바흐의 추측]

2 보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다.

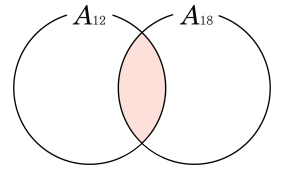
[배점 6, 상상]

- ① $7 = 3 + 4$ ② $12 = 5 + 7$
③ $14 = 5 + 9$ ④ $14 = 2 + 5 + 7$
⑤ $17 = 1 + 5 + 11$

해설

소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... 이므로 골드바흐의 추측을 가장 잘 설명한 것은 $12 = 5 + 7$ 이다.

27. 집합 $A_k = \{x \mid x \text{는 } k \text{의 배수}\}$ 라고 하면 $A_{12} = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 배수}\}$, $A_{18} = \{x \mid x \text{는 } 18 \text{의 배수}\}$ 이다. 다음 중 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합을 A_n 이라고 할 때, n 의 값을 구하여라.



[배점 6, 상상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 36

해설

색칠한 부분은 A_{12}, A_{18} 의 교집합이다.

$A_{12} = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 배수}\} = \{12, 24, 36, \dots\}$,

$A_{18} = \{x \mid x \text{는 } 18 \text{의 배수}\} = \{18, 36, 54, \dots\}$

이므로 $A_{12} \cap A_{18} = \{36, 72, 108, \dots\}$ 이다.

$\{36, 72, 108, \dots\}$ 를 조건제시법으로 나타내면

$\{x \mid x \text{는 } 36 \text{의 배수}\}$ 이므로 n 은 36 이다.

28. 자연수 k 의 모든 배수를 원소로 하는 집합을 A_k 라고 할 때, $(A_6 \cap A_8) \subset A_k$ 인 k 의 최솟값을 구하여라.

[배점 6, 상상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 24

해설

$A_6 \cap A_8$ 는 6 의 배수의 8 의 배수와 교집합이므로 6 과 8 의 공배수이다.

6 과 8 의 공배수는 24 이므로 A_k 는 24 의 배수의 집합이다.

따라서 $A_k = \{24, 48, 72, \dots\}$ 이고 k 의 최솟값은 24 이다.