

문제 풀이 과제

1. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 일 때, 집합 $B = \{x \mid x = a+b, a \in A, b \in A\}$ 의 부분집합의 개수를 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 32 개

해설

$b \backslash a$	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

표에 의하여 $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 이므로 집합 B 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개) 이다.

2. 집합 $A = \{2, 4, 6, 8, \dots, 18\}$ 를 조건제시법으로 올바르게 나타낸 것을 모두 골라라.

㉠ $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 18 \text{인 정수}\}$

㉡ $A = \{x \mid 1 < x \leq 17 \text{인 짝수}\}$

㉢ $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{보다 작은 짝수}\}$

㉣ $A = \{x \mid x \text{는 } 18 \text{ 이하의 짝수}\}$

㉤ $A = \{x \mid x \text{는 } 19 \text{ 미만의 짝수}\}$

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉣

▷ 정답 : ㉤

해설

$$A = \{2, 4, 6, 8, \dots, 18\}$$

$$= \{x \mid x \text{는 } 20 \text{보다 작은 짝수}\}$$

$$= \{x \mid x \text{는 } 19 \text{ 미만의 짝수}\}$$

$$= \{x \mid x \text{는 } 18 \text{ 이하의 짝수}\}$$

3. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$, $B = \{1, 2, a\}$ 에 대하여 $B \subset A$ 를 만족하는 a 의 값을 모두 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 3

▷ 정답: 6

해설

$A = \{1, 2, 3, 6\}$
 $B \subset A$ 이므로 $a \in A$
 $\therefore a = 3$ 또는 $a = 6$

4. 두 집합 $A = \{1, 2, 4, 5, 7\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{이하의 홀수}\}$ 에 대하여 $X \cap A = X$ 와 $X \cup (A \cap B) = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 8개

해설

$X \cap A = X$ 이므로 $X \subset A$
 $X \cup (A \cap B) = X$ 이므로 $(A \cap B) \subset X$
 $A \cap B = \{1, 5\}$
 $\{1, 5\} \subset X \subset \{1, 2, 4, 5, 7\}$
 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 1, 5를 반드시 포함하는 집합이다.
 $\therefore 2^{5-2} = 2^3 = 8$ (개)

5. $U = \{x \mid 0 \leq x < 12, x \text{는 자연수}\}$ 의 두 부분 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{이하의 } 4 \text{의 배수}\}$, $B = \{3, 4, 7, 8, 11\}$ 에 대하여 $n((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))$ 는?
[배점 5, 중상]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

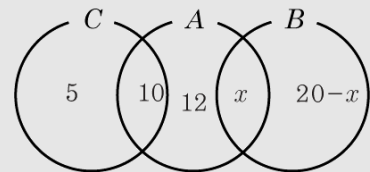
$A = \{4, 8, 12\}$, $B = \{3, 4, 7, 8, 11\}$ 이므로
 $n((A \cup B^c) \cup (B \cap A^c)) =$
 $n((A - B) \cup (B - A)) = n(\{3, 7, 11, 12\}) = 4$
 이다.

6. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = 32$, $n(B) = 20$, $n(C) = 15$, $n(A \cap B) = x$, $n(B \cap C) = 0$, $n(A \cap C) = 10$, $n(A - B) = 22$ 일 때, $n(A \cup B \cup C)$ 의 값은?
[배점 5, 상하]

① 41 ② 43 ③ 45 ④ 47 ⑤ 49

해설

여그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.
 그러므로 $n(A \cup B \cup C) = 5 + 10 + 12 + x + 20 - x = 47$



7. 전체집합 $S = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분 집합 A, B 가 있다.

$A \cap B = \emptyset$, $B^c = \{1, 7, 8, 9\}$, $S - (A^c \cup B) = \{1, 7\}$ 일 때, $n(A \cup B)$ 를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 8

해설

$S = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$
 $B^c = \{1, 7, 8, 9\}$ 이면 $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 10\}$
 $S - (A^c \cup B) = S \cap (A^c \cup B)^c$
 $(A^c \cup B)^c = A \cap B^c = A - B$
 $A \cap B = \emptyset$ 이므로 $A - B = A$
따라서 $S - (A^c \cup B) = S \cap A = \{1, 7\}$
 $\therefore n(A \cup B) = 8$

8. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합인 집합 $A_n = \{x | x \text{는 } n \text{의 배수}\}$ 이라고 정의한다. 다음 중 옳지 않은 것은 ? [배점 5, 상하]

① $A_4 \subset A_2$

② $A_6 \subset A_2$

③ $A_2 \cap A_5 = A_{10}$

④ $A_3 \cap A_4 \subset A_{24}$

⑤ $A_2 - A_3 = A_2 - A_6$

해설

- ① $A_4 \subset A_2 \rightarrow$ 모든 4 의 배수는 2 의 배수이므로 옳다.
 ② $A_6 \subset A_2 \rightarrow$ 모든 6 의 배수는 2 의 배수이므로 옳다.
 ③ $A_2 \cap A_5 = A_{10} \rightarrow$ 2 와 5 의 공배수의 집합은 10 의 배수의 집합과 같으므로 옳다.
 ④ $A_3 \cap A_4 \subset A_{24} \rightarrow A_3 \cap A_4 = A_{12}$ 이므로 $A_{24} \subset A_{12}$ 따라서 틀렸다.
 ⑤ $A_2 - A_3 = A_2 - A_6 \rightarrow$ 2 의 배수에서 3 의 배수를 제외한 것은 6 의 배수를 제외한 것과 같으므로 옳다.

9. 다음 중 옳지 않은 것은 ? [배점 5, 상하]

- ① $A \cup B = A, A \cap B = A$ 이면 $n(B - A) = 0$ 이다.
- ② $A^c \subset B^c$ 이면 $B - A$ 는 공집합이다.
- ③ A 가 무한집합, B 가 유한집합이면 $A \cup B$ 는 무한집합이다.
- ④ $A \cap B$ 가 유한집합이면 A, B 모두 유한집합이다.
- ⑤ $A = \{x | x \text{는 유리수}\}, B = \{x | x \text{는 자연수}\}$ 일 때, $A \cap B$ 는 무한집합이다.

해설

- ① $A \cup B = A, A \cap B = A$ 이면 $n(B - A) = 0$ 이다. $\rightarrow A = B$ 이므로 옳다.
- ② $A^c \subset B^c$ 이면 $B - A$ 는 공집합이다. $\rightarrow A^c \subset B^c$ 이면 $B \subset A$ 이므로 옳다.
- ③ A 가 무한집합, B 가 유한집합이면 $A \cup B$ 는 무한집합이다. $\rightarrow$ 무한집합과 유한집합의 합집합은 무한집합이다.
- ④ $A \cap B$ 가 유한집합이면 A, B 모두 유한집합이다. $\rightarrow$ 두 집합 중 어느 하나만 유한집합이라도 교집합은 유한집합이므로 틀렸다.
- ⑤ $A = \{x | x \text{는 유리수}\}, B = \{x | x \text{는 자연수}\}$ 일 때, $A \cap B$ 는 무한집합이다. $\rightarrow A \cap B$ 은 자연수 전체의 집합이므로 무한집합이다.

10. 집합 $S = \{x | x \text{는 자연수}\}$ 의 부분집합 $A = \{x | x \in A \text{이면 } 5 - x \in A\}$ 가 있다. 집합 A 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3 개

해설

자연수 전체집합의 부분집합인 A 가 $A = \{x | x \in A \text{이면 } 5 - x \in A\}$ 라는 조건을 가질 때,
 집합 A 의 원소가 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, 4 이다.
 조건을 이용하면 1 과 4, 2 와 3 은 반드시 동시에 원소가 되어야 하므로
 집합 A 는 $\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}$ 의 3 개의 경우가 가능하다.

11. 75 명의 학생을 대상으로 조사를 하였더니 영어학원을 다니는 학생은 24 명, 수학학원을 다니지 않는 학생은 32 명이였다. 영어학원과 수학학원을 모두 다니지 않는 학생 수의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

조사한 학생의 집합을 U , 영어학원을 다니는 학생의 집합을 A , 수학학원을 다니는 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 75, n(A) = 24, n(B^c) = 32$$

$$n(B) = n(U) - n(B^c) = 75 - 32 = 43$$

$A \cap B = \emptyset$ 일 때, $n(A \cup B)$ 이 최대이므로 $n(A \cup B)$ 의 최댓값은 $24 + 43 = 67$ 이다.

$$\therefore (n((A \cup B)^c) \text{의 최솟값}) = m = 75 - 67 = 8$$

$A \subset B$ 일 때, $n(A \cup B)$ 이 최소이므로 $n(A \cup B)$ 의 최솟값은 $n(B) = 43$

$$\therefore (n((A \cup B)^c) \text{의 최댓값}) = M = 75 - 43 = 32$$

따라서 $M - m = 32 - 8 = 24$ 이다.

12. 중학생 120 명을 대상으로 수학, 과학, 영어 중 자신 있어 하는 과목을 선택하게 하였더니, 수학을 선택한 학생은 33 명, 과학을 선택한 학생은 40 명, 영어를 선택한 학생은 36 명이였다. 또, 두 과목을 선택한 학생은 모두 34 명, 세 과목을 모두 선택한 학생은 9 명이였다. 세 과목 중 어떤 과목도 선택하지 않은 학생 수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 63 명

해설

중학생 전체의 집합을 U , 수학을 선택한 학생의 집합을 A , 과학을 선택한 학생의 집합을 B , 영어를 선택한 학생의 집합을 C 라 하면,

두 과목을 선택한 학생 수는 $n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3n(A \cap B \cap C)$,

세 과목을 모두 선택한 학생 수는 $n(A \cap B \cap C)$, 세 과목 중 어떤 과목도 선택하지 않은 학생 수는 $n((A \cup B \cup C)^c)$,

$$n(U) = 120, n(A) = 33, n(B) = 40, n(C) = 36, n(A \cap B \cap C) = 9,$$

$$n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3n(A \cap B \cap C) = 34 \text{ 이므로,}$$

$$n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 34 + 27 = 61$$

,

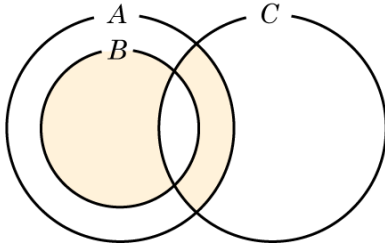
$$n(A \cup B \cup C)$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - (n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 33 + 40 + 36 - 61 + 9 = 57$$

$$\therefore n((A \cup B \cup C)^c) = n(U) - n(A \cup B \cup C) = 120 - 57 = 63$$

13. 다음 벤 다이어그램에서 $n(A) = 20$, $n(B) = 10$, $n(C) = 15$, $n(B \cup C) = 21$, $n(A \cup B \cup C) = 25$ 일 때, 빗금 친 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수를 구하여라.



[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 개

해설

$B \subset A$ 이므로 $A \cup B \cup C = A \cup C$ 이다.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C) \rightarrow n(A \cap C) = 10,$$

$$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C) \rightarrow n(B \cap C) = 4,$$

빗금 친 부분은 $(B - C) \cup ((A \cap C) - (B \cap C))$ 이므로,

$$n((B - C) \cup ((A \cap C) - (B \cap C))) = n(B) - n(B \cap C) + n(A \cap C) - n(B \cap C) = 10 - 4 + 10 - 4 = 12$$

14. 자연수를 원소로 하는 두 집합

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{a + x | a \in A\}$ 가 있다.
 $A \cap B = \{5, 7\}$ 이고, 집합 A 의 원소의 합이 16 ,
 $A \cup B$ 의 원소의 합이 36 일 때, 집합 B 의 원소의
 합을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 이므로

$$B = \{a + x | a \in A\} \\ = \{a_1 + x, a_2 + x, a_3 + x, a_4 + x\}$$

따라서 집합 A 의 원소의 합은

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 16$$

집합 B 의 원소의 합은

$$(a_1 + x) + (a_2 + x) + (a_3 + x) + (a_4 + x) = 16 + 4x$$

$A \cup B$ 의 원소의 합은

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_1 + x) + (a_2 + x) + (a_3 + x) + (a_4 + x) - 5 - 7 \\ = 16 + 16 + 4x - 5 - 7$$

$$= 20 + 4x = 36$$

$$\therefore x = 4$$

따라서 집합 B 의 원소의 합은 $16 + 4 \times 4 = 32$

15. 전체집합 $U = \{2x | x \leq 10, x \text{는 자연수}\}$ 의 두 부분 집합 A, B 에 대하여 $A = \{x | 5 < x < 15\}$ 일 때, $A^c \cap B^c \neq \emptyset, n(A \cap B) = 4$ 를 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5 개

해설

$U = \{2x | x \leq 10, x \text{는 자연수}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$,

$A = \{x | 5 < x < 15\} = \{6, 8, 10, 12, 14\}$,

$A^c \cap B^c \neq \emptyset \rightarrow n(A \cup B) = U$ 이고, $n(A \cap B) = 4$ 를 만족하는 집합 B 는 A 의 원소 중 4 개는 반드시 포함하고, 나머지 하나는 반드시 포함하지 않으며 A^c 의 원소를 모두 포함하는 부분집합이다.

(1) A 의 원소 중 $\{6, 8, 10, 12\}$ 를 반드시 포함하고 14 는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 2, 4, 16, 18, 20 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)

(2) A 의 원소 중 $\{6, 8, 10, 14\}$ 를 반드시 포함하고 12 는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 2, 4, 16, 18, 20 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)

(3) A 의 원소 중 $\{6, 8, 12, 14\}$ 를 반드시 포함하고 10 는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 2, 4, 16, 18, 20 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)

(4) A 의 원소 중 $\{6, 10, 12, 14\}$ 를 반드시 포함하고 8 는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 2, 4, 16, 18, 20 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)

(5) A 의 원소 중 $\{8, 10, 12, 14\}$ 를 반드시 포함하고 6 는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 2, 4, 16, 18, 20 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)

따라서 집합 B 의 개수는 $1 \times 5 = 5$ (개)

16. 집합 $A = \{x | x \text{는 } 20 \text{ 이하의 소수}\}$, $B = \{2, 11\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수는?

$$B \subset X \subset A$$

[배점 6, 상상]

① 4 개 ② 8 개 ③ 16 개

④ 32 개 ⑤ 64 개

해설

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

X 는 원소 2 와 11 을 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 X 의 개수는 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$ (개) 이다.

17. 두 집합 $A = \{3, 6, a+2, 10\}$, $B = \{2a, 3, b, 5\}$ 에 대하여 $A \subset B, B \subset A$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

집합 A 에 원소 5 가 속해야 하므로 $a+2 = 5$ 이다. $\therefore a = 3$

$A = \{3, 6, 5, 10\}$, $B = \{6, 3, b, 5\}$ 에서

원소 10 이 집합 B 에 있어야 하므로 $b = 10$ 이다.

따라서 $a+b = 3+10 = 13$ 이다.

18. 세 집합 $A = \{x|x \text{는 } 21 \text{의 약수}\}$, $B = \{3, 7\}$, $C = \{x|x \text{는 } 21 \text{ 이하의 자연수}\}$ 일 때, 세 집합 A, B, C 의 포함관계를 기호를 사용하여 나타낸 것으로 옳은 것을 골라라. [배점 6, 상상]

- ① $B \subset A = C$ ② $B \subset C \subset A$
 ③ $B \subset A \subset C$ ④ $A \subset B \subset C$
 ⑤ $A = B \subset C$

해설

$A = \{1, 3, 7, 21\}$, $B = \{3, 7\}$, $C = \{1, 2, 3, \dots, 20, 21\}$
 $\therefore B \subset A \subset C$

19. 두 집합 $A = \{x|x \text{는 } 100 \text{ 이하인 } 6 \text{의 배수}\}$, $B = \{x| 3 \leq x < 20 \text{인 홀수}\}$ 에 대하여 $n(A) - n(B)$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 7

해설

$A = \{6, 12, 18, \dots, 96\}$,
 $B = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$ 이므로
 $n(A) = 16$, $n(B) = 9$
 $\therefore 16 - 9 = 7$

20. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 보기의 연산 과정 중 처음으로 잘못된 곳을 골라라.

보기

$$A^c - B^c = A^c \cap (B^c)^c = A^c \cap B = B - A = (A \cup B) - B$$

① ② ③ ④

[배점 6, 상상]

해설

$B - A = (A \cup B) - A$ 이다. 따라서 잘못된 곳은
 ④ $B - A = (A \cup B) - B$ 이다.