문제 풀이 과제

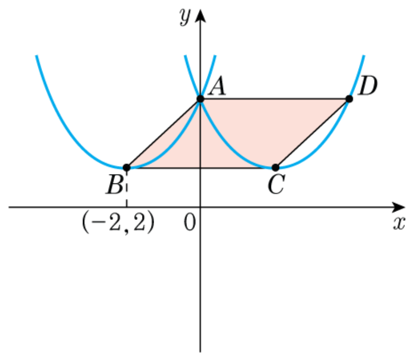
1. 이차함수 $y=-x^2+6x+4m-1$ 의 그래프의 꼭짓점이 직선 $-2x+y+6=0$ 의 위에 있을 때, 상수 m 의 값은? [배점 5, 중상]

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$y=-x^2+6x+4m-1$ 을 $y=a(x-p)^2+q$ 의 꼴로 바꾸면 $y=-(x-3)^2+8+4m$ 이므로 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 4m+8)$ 이다. 꼭짓점이 직선 $-2x+y+6=0$ 을 지나므로 $-6+4m+8+6=0$, $4m=-8$, $m=-2$ 이다.

2. 다음 그림은 이차함수 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2+2$ 의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동시킨 것이다. 이 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라. (단, 점 B와 C는 두 포물선의 꼭짓점이다.)



[배점 5, 중상]

▶ 답 :

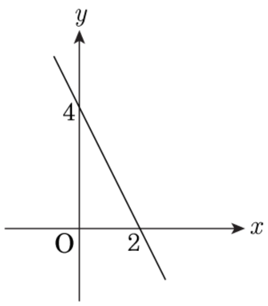
▷ 정답 : 8

해설

$y=\frac{1}{2}(x+2)^2+2$ 의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동 시키면 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+2$ 이다. 꼭짓점이 $(-2,\ 2)$에서 $(2,\ 2)$로 변하였고 점 A의 좌표는 $(0,\ 4)$이므로 평행사변형의 가로의 길이는 4 , 높이는 2‘이다. 따라서 넓이는 $4\times2=8$ 이다.

3. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 이차함수 $y = -\frac{1}{4}ax^2 - bx + 4$ 의 최댓값을 구하면?

[배점 5, 중상]



① 4 ② -4

③ 8 ④ -8

⑤ 0

해설

기울기 $a = -2$, y 절편 $b = 4$

$y = -\frac{1}{4}ax^2 - bx + 4$

$= \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$

$= \frac{1}{2}(x-4)^2 - 4$

$x = 4$ 일 때, 최솟값은 -4 이다.

4. 다음 보기의 이차함수 그래프 중 $y = ax^2$ 의 그래프가 3 번째로 폭이 넓을 때, $|a|$ 의 범위는?

보기

㉠ $y = -\frac{3}{2}x^2$

㉡ $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}$

㉢ $y = 2x^2 - x$ ㄹ. $-3(x+2)^2$

㉣ $y = \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1}$

[배점 5, 중상]

① $1 < |a| < \frac{1}{2}$ ② $1 < |a| < \frac{3}{2}$

③ $1 < |a| < \frac{5}{2}$ ④ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{3}{2}$

⑤ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{5}{2}$

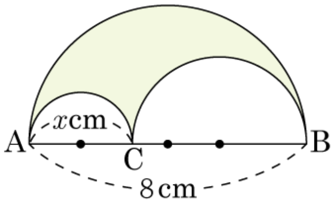
해설

a 의 절댓값이 작을수록 폭이 넓어진다.

a 의 절댓값을 각각 구하면

㉠ $\frac{3}{2}$ ㉡$\frac{1}{2}$ ㉢2 ㉣3 ㉤1 이므로 폭이 넓은 순서는 ㉡, ㉤, ㉠, ㉣, ㉤이다. 따라서 두 번째인 1과 세 번째인 $\frac{3}{2}$ 사이에 있어야 하므로 ④ $1 < |a| < \frac{3}{2}$ 이다.

5. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. $\overline{AB}$ 의 길이가 8cm 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi\text{cm}^2$ 일 때, y 의 최댓값을 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\overline{AC} = x\text{cm}$ 이므로 $\overline{BC} = (8-x)\text{cm}$ 이다.
따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는
(전체 반원의 넓이 - 작은 두 반원의 넓이의 합)
이다.

$\frac{1}{2} \times 4^2\pi - \left\{\frac{1}{2}\pi(\frac{x}{2})^2 + \frac{1}{2}\pi(\frac{8-x}{2})^2\right\} = y\pi$

$8\pi - \left(\frac{x^2}{8}\pi + \frac{64-16x+x^2}{8}\pi\right) = y\pi$

$8\pi - \left(\frac{2x^2-16x+64}{8}\right)\pi = y\pi$

$-\frac{1}{4}x^2\pi + 2x\pi = y\pi$

$y\pi = -\frac{1}{4}\pi(x^2-8x)$

$= -\frac{1}{4}\pi(x^2-8x+16-16)$

$= -\frac{1}{4}\pi(x-4)^2 + 4\pi$이다.

따라서 두 원의 반지름이 각각 4cm 일 때, 넓이는 최댓값 4π cm 를 갖는다.

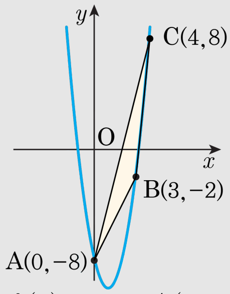
6. 이차함수 $y = 2x^2 - 12$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼 y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 포물선 위의 세 점 $A(0,a)$, $B(3,b)$, $C(4,8)$ 을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 넓이를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$y = 2(x-1)^2 - 12 + 2 = 2(x-1)^2 - 10$



$f(0) = -8 \quad A(0,-8)$

$f(3) = -2 \quad B(3,-2)$

△ABC 의 넓이는 사각형의 넓이에서 색칠한 부분의 넓이를 뺀 것과 같다.

$4 \times 16 - \frac{1}{2}(4 \times 16 + 4 \times 6 + 1 \times 16)$

$= 64 - 52 = 12$

7. 점 $(2,\ 10)$을 지나고 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ -8)$인 이차함수의 그래프가 있다. 이 포물선과 직선 $y=-3$에 대하여 대칭인 포물선의 그래프의 x 절편의 x 좌표 값을 각각 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ -8)$인 이차함수의 방정식은

$y=a(x+1)^2-8$이고 점 $(2,\ 10)$을 지나므로

$10=a(2+1)^2-8$

$\therefore\ a=2$

따라서 이차함수의 그래프는 $y=2(x+1)^2-8$

이 포물선과 직선 $y=-3$에 대하여 대칭인 포물선의 그래프는

꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 2)$ 이므로

$y=-2(x+1)^2+2$

이 그래프의 x 절편은 $y=0$일 때의 x의 값이므로

$-2x^2-4x=0$

$\therefore\ x=0,\ -2$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=4$

8. 정의역이 $\{x \mid -2\le x\le 3\}$ 인 이차함수 $y=-x^2+4x+m+1$ 의 최솟값이 -5 일 때, 최댓값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$y=-x^2+4x+m+1=-(x-2)^2+m+5$ 이고

정의역이 $\{x \mid -2\le x\le 3\}$ 이므로

$x=-2$ 일 때, $y=m-11$

$x=3$ 일 때, $y=m+4$

이때 $m-11<m+4$ 이므로 최솟값은 $m-11=-5$

$\therefore\ m=6$

따라서 $x=2$ 일 때 최댓값은 11 이다.

9. 함수 $f(x)=x-3,\ g(x)=x^2,\ h(x)=2x+4$ 에 대하여 $h(g(f(x)))$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, $f(g(h(m)))$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 141

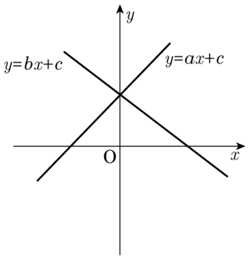
해설

$g(f(x))=(x-3)^2,\ h(g(f(x)))=2(x-3)^2+4$

이므로 $m=4$

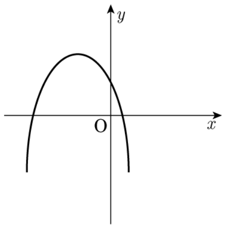
$\therefore\ f(g(h(m)))=(2m+4)^2-3=141$

10. 두 일차함수 $y = ax + c$, $y = bx + c$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 이차함수 $y = ax^2 - bx - c$ 의 그래프로 적당한 것을 고르시오.

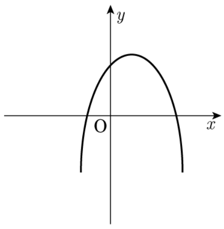


[배점 5, 상하]

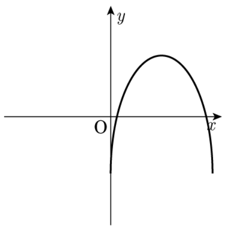
①



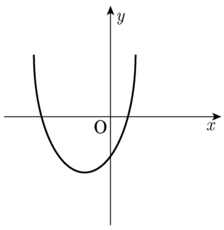
②



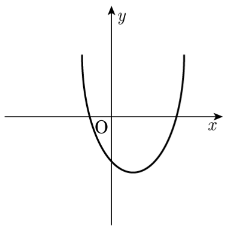
③



④



⑤



해설

$y = ax + c$ 에서 $a > 0,\ c > 0$

$y = bx + c$ 에서 $b < 0,\ c > 0$ 이므로

11. $x = 2$ 일 때 최솟값 -1을 갖고, y 절편이 3 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y = a(x-p)^2 + q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = a(x-2)^2 - 1$

$= a(x^2 - 4x + 4) - 1$

$= ax^2 + 4ax + 4a - 1$

$4a - 1 = 3$

$a = 1$

$y = (x-2)^2 - 1$

$apq = 1 \times 2 \times (-1) = -2$

12. 두 이차함수 $y = 3x^2$, $y = 2x^2 + 10$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 내부에 있는 점 중, x, y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 35 개

해설

두 그래프의 교점의 x 좌표를 구하면

$3x^2 = 2x^2 + 10$

$\therefore x = \pm\sqrt{10}$

이때, 두 그래프로 둘러싸인 영역의 x 좌표의 범위가 $-\sqrt{10} < x < \sqrt{10}$ 이고,

y 좌표의 범위는 $3x^2 < y < 2x^2 + 10$

정수인 x 좌표는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

(1) $x = \pm 3$ 일 때, $27 < y < 28$ 이므로 정수인 y 는 없다.

(2) $x = \pm 2$ 일 때, $12 < y < 18$ 이므로 $y = 13, 14, 15, 16, 17$

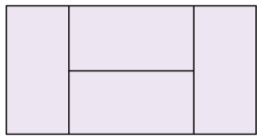
(3) $x = \pm 1$ 일 때, $3 < y < 12$ 이므로 $y = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$

(4) $x = 0$ 일 때, $0 < y < 10$ 이므로 $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

따라서, x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은

$2 \times (5 + 8) + 9 = 35$(개) 이다.

13. 다음 직사각형의 변의 길이와 직사각형 내부의 선분의 길이의 총합이 150 이고, 내부의 4 개의 직사각형의 넓이는 모두 같다. 큰 직사각형의 넓이가 최대일 때, 큰 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 비를 구하여라.



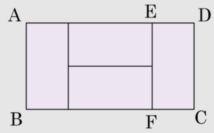
[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8 : 5

해설

세로의 길이를 x , 가로의 길이를 y 라 하면



$\square CDEF = \frac{1}{4}\square ABCD$ 이므로 $\overline{DE} = \frac{1}{4}y$

전체 선분의 길이의 총합이 150 이므로

$4x + 2y + (y - \frac{1}{2}y) = 4x + \frac{5}{2}y = 150$ 이므로

$y = -\frac{8}{5}x + 60$

직사각형 ABCD 의 넓이를 S 라 하면

$S = xy = x(-\frac{8}{5}x + 60)$

$= -\frac{8}{5}(x - \frac{75}{4})^2 + \frac{1125}{2}$

$\therefore\ x = \frac{75}{4}$ 일 때, 큰 직사각형의 넓이가 최대가 되므로 $y = \left(-\frac{8}{5}\right) \times \frac{75}{4} + 60 = 30$

따라서 큰 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 비는 $y : x = 8 : 5$ 이다.

14. 이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 10$ 의 그래프의 꼭짓점을 A, y 절편을 B, x 절편을 각각 C, D 라 할 때, 사각형 ABCD 의 넓이가 42 가 되는 k 의 값을 모두 구하여라. (단, $0 < k < \sqrt{10}$) [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $10\sqrt{10}$

해설

$y = x^2 - 2kx + k^2 - 10 = (x - k)^2 - 10$

$\therefore$ A$(k,\ -10)$, B$(0,\ k^2 - 10)$

$x^2 - 2kx + k^2 - 10 = 0$ 에서 $x = k \pm \sqrt{10}$

$\therefore$ C$(k - \sqrt{10},\ 0)$, D$(k + \sqrt{10},\ 0)$

원점을 O 라 하면 $k > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\therefore\ \square\text{ABCD} &= \triangle\text{OBC} + \triangle\text{ABO} + \triangle\text{AOD} \\ &= \frac{1}{2} \times (-k + \sqrt{10})(-k^2 + 10) \\ &\quad + \frac{1}{2} \times (-k^2 + 10) \times k \\ &\quad + \frac{1}{2} \times (k + \sqrt{10}) \times 10\end{aligned}$$

이 식을 정리하면 $k^2 - 10\sqrt{10}k + 84\sqrt{10} - 200 = 0$

따라서 k 의 모든 값의 합은 $10\sqrt{10}$ 이다.

15. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 좌표평면 위의 모든 사분면을 지나도록 하는 조건을 빠짐없이 찾아라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

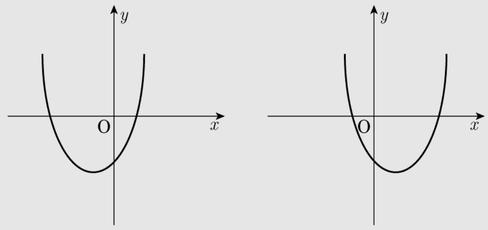
▶ 답 :

▷ 정답 : $c < 0$

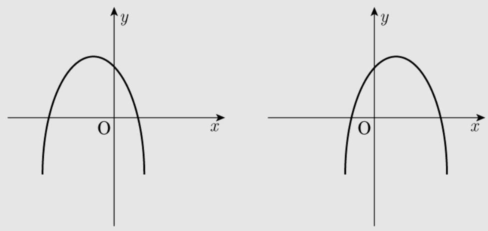
▷ 정답 : $0 > c$

해설

(1) $a > 0$ 인 경우 $ac < 0$



(2) $a < 0$ 인 경우 $ac > 0$



따라서 (1), (2) 에서 $c < 0$ 이다.

16. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 일 때, 최솟값이 -2 이다. 이 함수의 그래프가 제 3 사분면을 지나지 않을 때, a 의 값이 될 수 있는 가장 작은 정수를 구하여라. [배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x = 2$ 일 때 최솟값 -2 를 가진다. $y = a(x-2)^2 - 2$. 또한 최솟값이 존재하므로, $a > 0$ 이다.
그래프가 제3 사분면을 지나지 않는다는 조건을 만족해야 하므로, y 절편이 음이 아닌 실수이어야 한다.
따라서, y 절편$= 4a - 2 \geq 0$, $a \geq \frac{1}{2}$ 이다.

17. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 에서 최댓값 3 을 갖고 제2 사분면을 지나지 않는다고 할 때, a 의 값의 범위는? [배점 6, 상상]

① $a \geq -\frac{3}{4}$ ② $a \leq -\frac{3}{4}$ ③ $a \leq \frac{3}{4}$
④ $a \leq 3$ ⑤ $a \geq -3$

해설

$y = a(x-2)^2 + 3(a < 0)$
$y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$
(y절편) $\leq 0, 4a + 3 \leq 0$
$\therefore\ a \leq -\frac{3}{4}$