

문제 풀이 과제

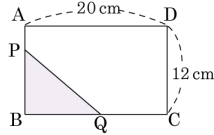
1. 이차방정식 $(x+4)^2 = k$ 의 두 근의 곱이 13 일 때, k 의 값은? [배점 4, 중중]

① 3 ② 5 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$\begin{aligned} x+4 &= +\sqrt{k} \\ x &= -4+\sqrt{k} \\ (-4+\sqrt{k})(-4-\sqrt{k}) &= 13 \\ 16-k &= 13 \\ \therefore k &= 3 \end{aligned}$$

2. 그림과 같이 $\overline{AB} = 12\text{cm}$, $\overline{BC} = 20\text{cm}$ 인 직사각형 ABCD 에서 점 P 는 A 를 출발하여 B 까지 초속 1cm, Q 는 B 출발하여 C 까지 초속 2cm 로 움직인다. 점 P 와 Q 가 동시에 출발할 때, 몇 초 후에 $\triangle PBQ$ 의 넓이가 35cm^2 가 되는지 구하여라.



[배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 정답: 5 초후

▶ 정답: 7 초후

해설

$$\begin{aligned} t \text{ 초 후의 } \overline{PB} &= 12-t, \overline{BQ} = 2t \\ t \text{ 초 후 } \triangle PBQ \text{ 의 넓이가 } 35\text{cm}^2 \text{ 라고 하면} \\ 35 &= \frac{1}{2} \times 2t \times (12-t) \\ t^2 - 12t + 35 &= 0 \\ (t-7)(t-5) &= 0 \\ t &= 5 \text{ 또는 } 7 \end{aligned}$$

3. 이차 방정식 $x^2 - 3x - 5 = 0$ 의 두 근의 합과 곱이 이차방정식 $2x^2 + ax + b = 0$ 의 해일 때, $b-a$ 의 값은? [배점 4, 중중]

① -36 ② -34 ③ -26
④ 24 ⑤ 30

해설

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 5 = 0 \text{ 에서} \\ \text{두 근의 합: 3, 두 근의 곱: -5} \\ 2(x-3)(x+5) \\ = 2(x^2 + 2x - 15) = 2x^2 + 4x - 30 \\ a = 4, b = -30 \therefore b - a = -34 \end{aligned}$$

4. 이차방정식 $\frac{1}{3}x^2 - x + \frac{5}{9} = 0$ 의 근이 $\alpha = \frac{m \pm \sqrt{n}}{6}$ 일 때, $m+n$ 의 값은? [배점 4, 중중]

① 13 ② 21 ③ 30 ④ 35 ⑤ 41

해설

$$\begin{aligned} \text{양변에 9 를 곱하면 } 3x^2 - 9x + 5 = 0 \\ \text{근의 공식을 이용하여 풀면} \\ x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 60}}{6} = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{6} \\ \therefore m = 9, n = 21 \\ \therefore m + n = 9 + 21 = 30 \end{aligned}$$

5. 이차방정식 $x^2 - kx + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 2$ 이다. 이 때, 상수 k 의 값은?

[배점 4, 중중]

- ① -4 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

이차방정식 $x^2 - kx + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta = k, \alpha\beta = 2$
 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{k}{2} = 2$
 $\therefore k = 4$

6. 이차방정식 $2x^2 - 7x + 2 = 0$ 의 두 근 중에서 큰 것을 m 이라 하면 $n < m < n + 1$ 이다. 정수 n 의 값은?

[배점 5, 중상]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$2x^2 - 7x + 2 = 0, 2\left(x^2 - \frac{7}{2}x\right) = -2$
 $2\left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{16}\right) = -2 + \frac{49}{8}$
 $2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{33}{8}, \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{33}{16}$
 $x = \frac{7}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{4}$
 $\therefore m = \frac{7 + \sqrt{33}}{4}$
 $5 < \sqrt{33} < 6$
 $\frac{7+5}{4} < m < \frac{7+6}{4}, 3 < m < 3.25$
 $3 < m < 4$
 $\therefore n = 3$

7. $x(x-3) = 0$ 을 $(ax+b)^2 = q$ 의 꼴로 바꾸었을 때, abq 의 값을 구하라. [배점 5, 중상]

- ① $\frac{27}{8}$ ② $-\frac{27}{8}$ ③ $-\frac{25}{8}$
 ④ $\frac{25}{8}$ ⑤ $\frac{23}{8}$

해설

$x(x-3) = 0$
 $x^2 - 3x = 0$
 $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$
 $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$
 $a = 1, b = -\frac{3}{2}, q = \frac{9}{4}$
 $\therefore abq = -\frac{27}{8}$

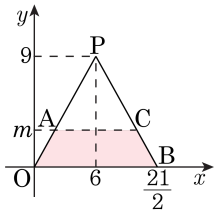
8. 한 원 위에 n 개의 점을 잡아 n 각형을 만들었다. 새로 만든 도형의 대각선의 총 개수가 14 개 일 때, n 의 값은? [배점 5, 중상]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\frac{n(n-3)}{2} = 14$ 이므로
 $n^2 - 3n - 28 = 0$
 $(n+4)(n-7) = 0$
 $n = 7 (n > 0)$

9. 다음 그림에서 사다리꼴 AOBC의 넓이가 $\frac{105}{4}$ 일 때, m 의 값을 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 3

해설

세 점 O, A, P를 지나는 직선의 방정식: $y = \frac{3}{2}x$

세 점 B, C, P를 지나는 직선의 방정식: $y = -2x + 21$

A $(a, \frac{3}{2}a)$ 라 하면

$$\frac{3}{2}a = m, a = \frac{2}{3}m$$

C $(c, -2c + 21)$ 라 하면 $-2c + 21 = m, c = \frac{21-m}{2}$

$$\overline{AC} = \frac{21-m}{2} - \frac{2}{3}m = \frac{63-7m}{6}$$

사다리꼴 AOBC의 넓이: $\left(\frac{21}{2} + \frac{63-7m}{6}\right) \times$

$$m \times \frac{1}{2} = \frac{105}{4}$$

$$\frac{63}{6}m - \frac{7}{12}m^2 = \frac{105}{4}$$

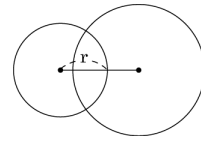
$$126m - 7m^2 = 315$$

$$m^2 - 18m + 45 = 0$$

$$(m-15)(m-3) = 0$$

$$0 < m < 9 \text{ 이므로 } m = 3$$

10. 다음 그림과 같이 반지름이 r 인 원과 반지름이 이 원의 두 배인 원이 겹치고 있다. 겹치지 않는 부분의 넓이의 차이가 12π 라고 할 때, 반지름 r 의 값은?



[배점 5, 중상]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

겹치는 부분은 두 원 모두에 있는 부분이므로, 겹치지 않는 부분의 넓이의 차는 두 원의 넓이의 차와 같다.

따라서 식으로 나타내면 $(2r)^2\pi - r^2\pi = 12\pi$ 이다.

$$r^2 - 4 = 0$$

$$\therefore r = 2 \ (r > 0)$$

11. 일정한 양의 물이 들어 있는 물탱크에서 물을 빼내고 있다. t 초 동안 $(t^2 + 2t + 5)L$ 만큼 물을 빼낸다면 13 초 후에 물탱크의 물을 전부 빼낼 수 있다고 할 때, 물탱크에 들어 있는 물의 양의 $\frac{1}{5}$ 만큼 빼내는데 걸리는 시간은 얼마인지 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: 5 초

해설

물탱크에 들어 있는 물의 양을 PL 라 하면 PL 를 전부 빼내는 데 걸리는 시간이 13 초이므로

$$P = t^2 + 2t + 5 = 13^2 + 2 \times 13 + 5 = 200$$

따라서 물탱크에 들어 있는 물의 양의 $\frac{1}{5}$ 만큼 빼내는데 걸리는 시간은 x 초로 놓으면 $x^2 + 2x + 5 = 40$ 이므로 $x^2 + 2x - 35 = 0$ 이다.

그러므로 $x = 5$ ($\because x > 0$)이다.

12. 원가가 A 원인 어떤 물건에 $x\%$ 의 이익을 붙여 정가를 매겼다가 다시 정가의 $x\%$ 를 할인하여 팔면 $\frac{A}{25}$ 원의 손해를 보게 된다. 이때 x 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

원가 A 원에 $x\%$ 의 이익을 붙이면 정가는 $A\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ 원이고, 다시 정가의 $x\%$ 를 할인하면 판매가는 $A\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{x}{100}\right)$ 원이다.

이때 $\frac{A}{25}$ 원의 손해를 보았으므로

$(\text{판매가}) - (\text{원가}) = -\frac{A}{25}$ 에서

$$A\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{x}{100}\right) - A = -\frac{A}{25}$$

$$A\left(1 - \frac{x^2}{10000}\right) = \frac{24}{25}A$$

$$1 - \frac{x^2}{10000} = \frac{24}{25}$$

$$\therefore x = \pm 20$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 20$ 이다.

13. 원가가 A 원인 어떤 물건에 $x\%$ 의 이익을 붙여 정가를 매겼다가 다시 정가의 $x\%$ 를 할인하여 팔면 $\frac{A}{25}$ 원의 손해를 보게 된다. 이때 x 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

원가 A 원에 $x\%$ 의 이익을 붙이면 정가는 $A\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ 원이고, 다시 정가의 $x\%$ 를 할인하면 판매가는 $A\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{x}{100}\right)$ 원이다.

이때 $\frac{A}{25}$ 원의 손해를 보았으므로

$(\text{판매가}) - (\text{원가}) = -\frac{A}{25}$ 에서

$$A\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{x}{100}\right) - A = -\frac{A}{25}$$

$$A\left(1 - \frac{x^2}{10000}\right) = \frac{24}{25}A$$

$$1 - \frac{x^2}{10000} = \frac{24}{25}$$

$$\therefore x = \pm 20$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 20$ 이다.

14. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 p, q 일 때,
이차방정식 $\frac{x^2}{c} + \frac{x}{a} - \frac{b}{ac} = 0$ 의 두 근을 각각 p, q 에
관한 식으로 나타내어라. (단, $abc \neq 0$)

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-p$

▷ 정답 : $-q$

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 에서 $p + q = -\frac{b}{a}, pq = \frac{c}{a}$
 $\therefore b = -a(p + q), c = apq$
 $\frac{x^2}{c} + \frac{x}{a} - \frac{b}{ac} = 0$ 에 b, c 를 대입하면
 $\frac{x^2}{apq} + \frac{x}{a} - \frac{-a(p+q)}{a^2pq} = 0$
 $\frac{1}{a} \left(\frac{1}{pq}x^2 + x + \frac{p+q}{pq} \right) = 0$
 $x^2 + pqx + (p+q) = 0$
 $(x+p)(x+q) = 0$
 $\therefore x = -p$ 또는 $x = -q$
따라서 $\frac{x^2}{c} + \frac{x}{a} - \frac{b}{ac} = 0$ 의 두 근은 $-p$ 와 $-q$ 이다.

15. 자연수 n 에 대하여 $x^2 - \frac{x}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} + 1 = 0$ 의
두 근을 p_n, q_n 이라 할 때, $(p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_{100}) +$
 $(q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_{100})$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{101} - 1$

해설

근과 계수의 관계에서

$$p_n + q_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\therefore (p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_{100}) + (q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_{100})$$

$$= (p_1 + q_1) + (p_2 + q_2) + (p_3 + q_3) + \cdots + (p_{100} + q_{100})$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{101} - \sqrt{100}$$

$$= \sqrt{101} - 1$$

16. 이차방정식 $x^2 + 5x - 7 = 0$ 의 두 근을 a, b 라고 할
때, $(a - b)^2$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 53

해설

근과 계수의 관계로 부터

$$a + b = -5, ab = -7$$

$$\therefore (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 25 + 28 = 53$$

17. 연속하는 세 짝수가 있다. 가장 큰 짝수의 제곱은 나머지 두 짝수의 각각의 제곱의 합보다 48이 더 작다. 이를 만족하는 세 짝수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

▷ 정답 : 12

▷ 정답 : 14

해설

연속하는 세 짝수를 $x-2$, x , $x+2$ 라고 하면

$$(x+2)^2 = x^2 + (x-2)^2 - 48$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + x^2 - 4x - 44$$

$$x^2 - 8x - 48 = 0$$

$$(x-12)(x+4) = 0$$

$$x = -4 \text{ 또는 } x = 12$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = 12$$

$$\therefore \text{연속하는 세 짝수 } 10, 12, 14$$

18. 이차방정식 $x^2 + 4x - 1 = 0$ 을 $(x+a)^2 = b$ 의 꼴로 고칠 때, ab 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

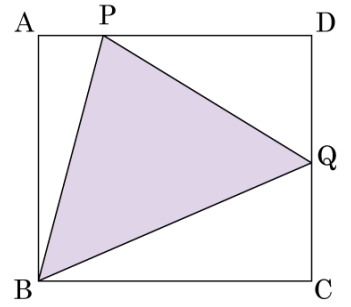
$$x^2 + 4x - 1 = (x+2)^2 - 5 = 0$$

$$(x+2)^2 = 5$$

$$a = 2, b = 5$$

$$\therefore ab = 10$$

19. 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD 에서 점 P 는 선분 AD 위에 있고, 점 Q 는 선분 CD 위에 있다. 삼각형 ABP, PDQ, BCQ 의 넓이가 각각 2.5, 4.5, 4 일 때, 삼각형 PBQ 의 넓이를 구하여라.



[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$\overline{AD} = x$, $\overline{AB} = y$ 라 하면

$$\triangle ABP = \frac{1}{2}y \times \overline{AP} = 2.5 \quad \therefore \overline{AP} = \frac{5}{y}$$

$$\triangle BCQ = \frac{1}{2}x \times \overline{QC} = 4 \quad \therefore \overline{QC} = \frac{8}{x}$$

$$\text{따라서 } \triangle PQD = \frac{1}{2} \left(x - \frac{5}{y} \right) \left(y - \frac{8}{x} \right) = 4.5$$

$$\left(\frac{xy-5}{y} \right) \left(\frac{xy-8}{x} \right) = 9$$

$$(xy-5)(xy-8) = 9xy$$

$$(xy)^2 - 22xy + 40 = 0$$

$$(xy-2)(xy-20) = 0$$

$$\therefore xy = 2 \text{ 또는 } xy = 20$$

$$\text{그런데 } xy > 11 \text{ 이므로 } xy = 20$$

$$\therefore \triangle PBQ = 20 - 11 = 9$$

20. 다음을 만족하는 실수 x 를 구하여라.

$$x = 3 - \frac{2}{2 - \frac{1}{3 - \frac{2}{2 - \frac{1}{3 - \frac{2}{2 - \dots}}}}} \quad [\text{배점 6, 상중}]$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

$$x = 3 - \frac{2}{2 - \frac{1}{3 - \frac{2}{2 - \frac{1}{3 - \frac{2}{2 - \dots}}}}} \quad \text{에서}$$

$$x = 3 - \frac{2}{2 - \frac{1}{x}} = 3 - \frac{2}{\frac{2x-1}{x}} = 3 - \frac{2x}{2x-1} = \frac{4x-3}{2x-1}$$

$$x(2x-1) = 4x-3$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\therefore x = 1, \frac{3}{2}$$

21. 이차방정식 $2x^2 - 6x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha + \beta)^2 = A$, $(\alpha - \beta)^2 = B$ 이다. $A + B$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = \frac{1}{2}$ 이므로, $(\alpha + \beta)^2 = A = 9$ 이다.

곱셈 공식에서

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{ 이므로}$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (3)^2 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 7$$

$B = 7$ 이다.

따라서 $A + B = 9 + 7 = 16$ 이다.

22. 이차방정식 $3x^2 + 6x - 15 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\alpha - \beta$ 를 구하여라.

(단, $\alpha > \beta$)

[배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{6}$

해설

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = -2$, $\alpha\beta = -5$ 이다.

곱셈공식에서

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{ 이므로}$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (-2)^2 - 4 \times (-5) = 24 \text{ 이다.}$$

$\alpha > \beta$ 이므로 $\alpha - \beta$ 은 양수이므로 $\alpha - \beta = 2\sqrt{6}$