문제 풀이 과제

1. $(-64x^3y^4)\times\boxed{}\div 4x^2y^3=-4x^2y$ 의 $\boxed{}$안에 알맞은 식을 써 넣어라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{4}x$

해설

$(-64x^3y^4)\times\boxed{}\div 4x^2y^3=-4x^2y$

$(-64x^3y^4)\times\boxed{}\times\frac{1}{4x^2y^3}=-4x^2y$

$\boxed{}=-4x^2y\times 4x^2y^3\times\frac{1}{-64x^3y^4}$

$\boxed{}=\frac{1}{4}x$

2. $-2(2x-y-\boxed{}+4)-4y=-2x-4y-8$ 일 때, $\boxed{}$ 안에 알맞은 식을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $x-y$

해설

양변에 $4y$ 를 더하면

$-2(2x-y-\boxed{}+4)=-2x-8$

$\therefore 2x-y-\boxed{}+4=x+4$

$\therefore \boxed{}=x-y$

3. $a^3=2$ 일 때, $\dfrac{a^9+\frac{1}{a^9}}{a^9-\frac{1}{a^9}}$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{65}{63}$

해설

$\dfrac{a^9+\frac{1}{a^9}}{a^9-\frac{1}{a^9}}$ 을 간단히 하면 $\dfrac{\frac{a^{18}+1}{a^9}}{\frac{a^{18}-1}{a^9}}=\dfrac{a^{18}+1}{a^{18}-1}$

$a^3=2$ 이므로

$a^{18}=(a^3)^6=2^6=64$

따라서 $a^{18}=64$ 를 대입하여 식의 값을 구하면

$\therefore$ (준식) $=\dfrac{a^{18}+1}{a^{18}-1}=\dfrac{64+1}{64-1}=\dfrac{65}{63}$

4. $a^{-3}=\frac{1}{2}$ 이고, $\frac{a^{-3}}{a}=pa^q$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$

해설

$a^{-3}=\frac{1}{2}$ 에서 $\frac{1}{a^3}=\frac{1}{2}$

$\dfrac{a^{-3}}{a}=\dfrac{\frac{1}{a^3}}{a}=\dfrac{1}{a^3}\times\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2}a^{-1}=pa^q$

$\therefore\ p=\frac{1}{2},\ q=-1,\ p+q=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

5. $a = \frac{1}{2^{2x-1}}, b = \frac{1}{3^x}$ 일 때, 12^x 을 a, b 를 사용한 식으로 나타내어라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{ab}$

해설

$12x = (2^2 \times 3)^x = 2^{2x} \times 3^x$ 이므로 주어진 a, b 를 $2^{2x}, 3^x$ 으로 정리하면

$2^{2x-1} = \frac{1}{a}$ 에서 $2^{2x} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{a}$ $\quad \therefore\ 2^{2x} = \frac{2}{a}$

$\frac{1}{3^x} = b$ 에서 $\quad \therefore\ 3^x = \frac{1}{b}$

$\therefore\ 12^x = 2^{2x} \times 3^x = \frac{2}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{2}{ab}$

6. $\left(\frac{16^4 + 4^{11}}{8^4 + 4^9}\right)^2$ 의 값을 2 의 거듭제곱으로 나타내어라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2^8

해설

$$\begin{aligned}\left(\frac{16^4 + 4^{11}}{8^4 + 4^9}\right)^2 &= \left(\frac{(2^4)^4 + (2^2)^{11}}{(2^3)^4 + (2^2)^9}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2^{16} + 2^{22}}{2^{12} + 2^{18}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2^{16}(1 + 2^6)}{2^{12}(1 + 2^6)}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2^{16}}{2^{12}}\right)^2 \\ &= (2^4)^2 = 2^8\end{aligned}$$

7. $3^{2009} + 7^{2009}$ 을 10 으로 나눈 나머지를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4, \cdots$ 을 10 으로 나눈 나머지는
$3, 9, 7, 1, \cdots$ 과 같이 반복되고,
$7,\ 7^2,\ 7^3,\ 7^4, \cdots$ 을 10 으로 나눈 나머지는
$7, 9, 3, 1, \cdots$ 과 같이 반복된다.
$2009 = 4 \times 502 + 1$ 이므로 3^{2009} 을 10 으로 나눈 나머지는 3 을 10 으로 나눈 나머지 3과 같고,
7^{2009} 을 10 으로 나눈 나머지는 7 을 10 으로 나눈 나머지 7 과 같다.
따라서 $3^{2009} + 7^{2009}$ 을 10 으로 나누면 $3 + 7 = 10$ 에서 나머지는 0 이다.

8. 자연수 n 을 7 로 나눈 나머지를 $f(n)$ 이라 정의할 때, $f(8^{12} \times 25^{18})$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$8^{12} \times 25^{18} = (2^3)^{12} \times (5^2)^{18} = 2^{36} \times 5^{36} = 10^{36}$ 이므로 $f(8^{12} \times 25^{18}) = f(10^{36})$
10 을 7 로 나눈 나머지는 3 이므로 10^{36} 를 7 로 나눈 나머지는 $3^{36} = (3^2)^{18} = 9^{18}$ 을 7 로 나눈 나머지와 같다.
또, 9 를 7 로 나눈 나머지는 2 이므로 9^{18} 을 7 로 나눈 나머지는 $2^{18} = (2^3)^6 = 8^6$ 을 7 로 나눈 나머지와 같다.
또, 8 을 7 로 나눈 나머지는 1 이므로 8^6 을 7 로 나눈 나머지는 1^6 을 7 로 나눈 나머지와 같다.
따라서 10^{36} 를 7 로 나눈 나머지는 1,
즉 $f(10^{36}) = 1$

9. 자연수 n 을 7 로 나눈 나머지를 $f(n)$ 이라 정의할 때, $f(8^{12} \times 25^{18})$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$8^{12} \times 25^{18} = (2^3)^{12} \times (5^2)^{18} = 2^{36} \times 5^{36} = 10^{36}$
이므로 $f(8^{12} \times 25^{18}) = f(10^{36})$
10 을 7 로 나눈 나머지는 3 이므로 10^{36} 를 7 로 나눈 나머지는 $3^{36} = (3^2)^{18} = 9^{18}$ 을 7 로 나눈 나머지와 같다.
또, 9 를 7 로 나눈 나머지는 2 이므로 9^{18} 을 7 로 나눈 나머지는 $2^{18} = (2^3)^6 = 8^6$ 을 7 로 나눈 나머지와 같다.
또, 8 을 7 로 나눈 나머지는 1 이므로 8^6 을 7 로 나눈 나머지는 1^6 을 7 로 나눈 나머지와 같다.
따라서 10^{36} 를 7 로 나눈 나머지는 1,
즉 $f(10^{36}) = 1$

10. 이진법으로 10 자리의 수는 십진법으로 나타내면 x 자리의 숫자 또는 y 자리의 숫자이다. (단, $x < y$) 이때, y^x 의 일의 자리의 숫자를 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이진법으로 10 자리의 수를 a 라 하면
$2^9 \le a \le 2^{10} - 1$
한 편, 2^9 과 $2^{10} - 1$ 의 자릿수는 같다.
$2^{10} = 1024$ 이므로 $1 \times 10^3 < 2^{10} < 1.1 \times 10^3$
10^3, 1.1×10^3 은 모두 4 자리의 수이므로 2^{10} 과 $2^{10} - 1$ 은 4 자리의 수이다.
또, $\dfrac{10^3}{2} < 2^9 < \dfrac{1.1 \times 10^3}{2}$ 에서
$5 \times 10^2 < 2^9 < 0.55 \times 10^3$
따라서 2^9 은 3 자리의 수이다.
그러므로 이진법으로 10 자리의 수는 십진법으로 나타내면 3 자리 또는 4 자리의 수이다.
$\therefore\ x = 3,\ y = 4$
따라서 $y^x = 4^3 = 64$ 이므로 일의 자리의 숫자는 4 이다.

11. 자연수 n 에 대하여 2^n, 3^n, 4^n, 5^n 각각의 일의 자리 숫자의 합을 $f(n)$ 이라 정의하고, $g(n) = 1\times2\times\cdots\times n$ 이라 정의할 때, $f(g(1)) + f(g(2)) + f(g(3)) + \cdots + f(g(100))$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1808

해설

2^n 의 일의 자리 숫자는 2, 4, 8, 6 이 반복되고
3^n 의 일의 자리 숫자는 3, 9, 7, 1 이 반복되고
4^n 의 일의 자리 숫자는 4, 6 이 반복되고
5^n 의 일의 자리 숫자는 5 이다.
$g(1), g(2), g(3), \cdots$ 는 각각 1, 2, 6, 24, 120, 720, $\cdots$ 에서 보듯이 $g(4)$ 부터는 모두 4 의 배수이다.
따라서
$f(g(1)) = 2+3+4+5 = 14$
$f(g(2)) = 4+9+6+5 = 24$
$f(g(3)) = 4+9+6+5 = 24$
$f(g(4)) = f(g(5)) = f(g(6)) = \cdots = f(g(100))$
$= 6+1+6+5 = 18$
$\therefore f(g(1)) + f(g(2)) + f(g(3)) + \cdots + f(g(100))$
$= 14+24+24+18\times97 = 1808$

12. $3^{3^{(3)^4}}$ 의 일의 자리의 숫자를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

3 의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1 이 계속 반복된다. $3^{3^{(3)^4}} = 3^{3^{81}}$ 에서 3^{81} 의 일의 자리의 숫자는 $81 = 4\times20+1$ 이므로 3 이다.
$x = 3^{81}$ 일 때, 3^x 의 일의 자리의 숫자는 3^3 의 일의 자리의 숫자와 같으므로 $3^{3^{(3)^4}} = 3^{3^{81}}$ 의 일의 자리의 숫자는 $3 = 4\times0+3$ 이므로 7 이다.