

문제 풀이 과제

1. $\frac{a}{180}$ 를 약분하면 $\frac{1}{b}$ 이 되고, 이것을 소수로 나타내면 유한소수가 될 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a 는 가장 작은 자연수이다.) [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 29

해설

$$\frac{a}{180} = \frac{a}{2^2 \times 3^2 \times 5} = \frac{1}{b}$$

$$a = 9, b = 20 \quad \therefore a + b = 29$$

2. $x = 0.\dot{i}i$ 일 때, $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{11}{10}$

해설

$$x = \frac{11}{99} = \frac{1}{9}, \frac{1}{x} = 9$$

$$(\text{준식}) = 1 + \frac{1}{1+9} = \frac{11}{10}$$

3. $\frac{1}{5} < 0.\dot{a} \leq \frac{2}{3}$ 를 만족하는 자연수 a 의 값의 합을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 20

해설

$$\frac{1}{5} < 0.\dot{a} \leq \frac{2}{3} \text{ 에서 } \frac{1}{5} < \frac{a}{9} \leq \frac{2}{3}, \frac{9}{45} < \frac{5a}{45} \leq \frac{30}{45}$$

이므로

$$9 < 5a \leq 30, \frac{9}{5} < a \leq 6$$

$\therefore a = 2, 3, 4, 5, 6$

4. $0.\dot{a}bcd\dot{e} = \frac{29947}{99000}$ 일 때, 한 자리 자연수 a, b, c, d, e 의 값을 각각 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 3$

▷ 정답: $b = 0$

▷ 정답: $c = 2$

▷ 정답: $d = 4$

▷ 정답: $e = 9$

해설

$$\frac{29947}{99000} = 0.3024\dot{9} \text{ 이므로}$$

$$a = 3, b = 0, c = 2, d = 4, e = 9$$

5. 자연수 a, b 에 대하여 $\frac{0.\dot{a}0\dot{b}}{0.\dot{b}0\dot{a}} = 1.2\dot{4}$ 일 때, $0.\dot{a}\dot{b} - 0.\dot{b}\dot{a}$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{1}{11}$

해설

$$\frac{0.\dot{a}0\dot{b}}{0.\dot{b}0\dot{a}} = \frac{100a + b}{999} = \frac{100a + b}{100b + a} = 1.2\dot{4} = \frac{112}{90} =$$

$$\frac{56}{45}$$

$$\Rightarrow 45(100a + b) = 56(100b + a)$$

$$\Rightarrow 4a = 5b$$

a, b 는 한자리 정수이어야 하므로, $a = 5, b = 4$ 이다.

$$\therefore 0.\dot{5}\dot{4} - 0.\dot{4}\dot{5} = \frac{54}{99} - \frac{45}{99} = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$$

6. $0.\dot{1}\dot{3}$ 에 어떤 기약분수 A 를 곱하였더니 $3.2\dot{7}$ 이 되었다. A 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{270}{11}$

해설

$$0.\dot{1}\dot{3} \times A = 3.2\dot{7}$$

$$A = \frac{327 - 3}{99} \div \frac{13 - 1}{90} = \frac{324}{99} \times \frac{90}{12} = \frac{270}{11}$$

7. 집합 $A = \left\{ x \mid x = \frac{b}{a}, \frac{b}{a} \text{는 기약분수이고, } a \text{는 } 2 \text{ 또는 } 5 \right\}$, 집합 $B = \left\{ \frac{n}{165} \mid \frac{n}{165} \notin A, n \text{은 자연수} \right\}$ 이다. 집합 B 의 원소를 작은 순서로 늘어 놓았을 때 320 번째의 원소를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{329}{165}$

해설

$\frac{n}{165} = \frac{n}{3 \times 5 \times 11}$ 이므로 분모가 165 이고, 분자가 자연수인 분수 중에서 유한소수가 아닌 수는 분자가 33의 배수가 아닌 수이다.

1에서 330까지의 자연수 중 33의 배수는 10개 이므로 33의 배수가 아닌 수는

$$330 - 10 = 320 \text{ (개)이다.}$$

즉, 분자가 329인 분수가 320번째 유한소수가 아닌 수이므로 $\frac{329}{165}$ 이다.

8. $64 \times 125 \times 256 \times 625$ 는 $n + 1$ 자리 자연수이다. 이 때, n 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$$64 \times 125 \times 256 \times 625 = 2^6 \times 5^3 \times 2^8 \times 5^4$$

$$= 2^7 \times (2 \times 5)^7$$

$$= 2^7 \times 10^7$$

따라서 주어진 식은 $64 \times 125 \times 256 \times 625 = 128 \times 10^7$ 이므로 10 자리의 자연수이다.

$$\therefore n = 9$$

9. 자연수 n 에 대하여 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ 이라고 정의한다. $2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots \times 1000 = x^{500} \times y!$ 일 때, $x + y$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: 502

해설

$$2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots \times 1000$$

$$= (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times (2 \times 4) \times \dots \times (2 \times 500)$$

$$= 2^{500} \times (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 500)$$

$$= 2^{500} \times 500!$$

$$\therefore x = 2, \therefore y = 500$$

$$x + y = 502$$

10. 다음과 같은 규칙으로 수를 나열하였을 때, 8^8 과 크기가 같은 수는 몇 번 나오는지 구하여라.

1	1	1	1	...
2	4	8	16	...
3	9	27	81	...
4	16	64	256	...
...

[배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: 8 번

해설

$8^8 = (2^3)^8 = 2^{24}$ 으로 나타낼 수 있다.

자연수 m, n 에 대하여 $(2^m)^n = 2^{mn} = 2^{24}$ 일 때, $mn = 24$ 가 되는 순서쌍 (m, n) 은 24 의 약수의 개수만큼 나타난다.

따라서 $24 = 2^3 \times 3$ 에서 24 의 약수의 개수는 $(3+1)(1+1) = 8$ (개) 이므로 8^8 과 크기가 같은 수는 모두 8 번 나온다.

11. 전체집합이 유리수의 집합이고 집합 A, B, C 가 다음과 같을 때, $n(A \cap B \cap C^C)$ 의 값을 구하여라.

$$A = \{x | x \text{는 유한소수}\}$$

$$B = \left\{x \mid x = \frac{a}{90}, a \text{는 } 100 \text{ 이하의 자연수}\right\}$$

$$C = \{x | x \text{는 정수}\}$$

[배점 6, 상상]

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

분수 $\frac{a}{90}$ 가 정수가 아닌 유한소수가 되는 a 는 100 이하의 9 의 배수

$A \cap B \cap C^C = \{x \mid x = \frac{a}{90}, a \text{는 } 100 \text{ 이하의 } 9 \text{의 배수}\} - n \left\{ \frac{90}{90} \right\}$ 이므로

$$n(A \cap B \cap C^C) = 11 - 1 = 10$$

12. 전체집합이 유리수의 집합이고 집합 A, B, C 가 다음과 같을 때, $n(A \cap B \cap C^C)$ 의 값을 구하여라.

$$A = \{x | x \text{는 유한소수}\}$$

$$B = \left\{x \mid x = \frac{a}{90}, a \text{는 } 100 \text{ 이하의 자연수}\right\}$$

$$C = \{x | x \text{는 정수}\}$$

[배점 6, 상상]

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

분수 $\frac{a}{90}$ 가 정수가 아닌 유한소수가 되는 a 는 100 이하의 9 의 배수

$A \cap B \cap C^C = \{x \mid x = \frac{a}{90}, a \text{는 } 100 \text{ 이하의 } 9 \text{의 배수}\} - n \left\{ \frac{90}{90} \right\}$ 이므로

$$n(A \cap B \cap C^C) = 11 - 1 = 10$$

13. $A = \left\{ x \mid x \text{는 } \frac{b}{a}, a, b \text{는 정수}, a \neq 0 \right\}$, $B = \{x \mid x \text{는 무한소수}\}$, $C = \left\{ \frac{1}{2}, 0, \pi, 1.2020\dots, \frac{4}{9}, \frac{1}{7}, \frac{5}{18} \right\}$
 일때, $n(C - (A \cap B))$ 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상상]

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$$n(C - (A \cap B)) = n\left(\left\{\frac{1}{2}, 0, \pi\right\}\right) = 3$$

14. $A = \left\{ x \mid x \text{는 } \frac{b}{a}, a, b \text{는 정수}, a \neq 0 \right\}$, $B = \{x \mid x \text{는 무한소수}\}$, $C = \left\{ \frac{1}{2}, 0, \pi, 1.2020\dots, \frac{4}{9}, \frac{1}{7}, \frac{5}{18} \right\}$
 일때, $n(C - (A \cap B))$ 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상상]

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$$n(C - (A \cap B)) = n\left(\left\{\frac{1}{2}, 0, \pi\right\}\right) = 3$$