문제 풀이 과제

1. 한 외각의 크기를 한 내각의 크기로 나누었을 때, 자연수가 되는 정다각형을 모두 구하면?

[배점 5, 상하]

① 정삼각형, 정사각형

② 정삼각형, 정오각형

③ 정삼각형, 정육각형

④ 정육각형, 정팔각형

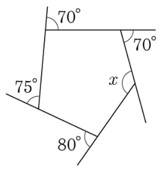
⑤ 정팔각형, 정십이각형

해설

$\frac{360°}{n} \div \frac{180° \times (n-2)}{n} = \frac{2}{n-2}$

$\frac{2}{n-2}$ 가 자연수가 되는 경우는 $n = 3$ 또는 $n = 4$ 인경우이다.

2. 다음 그림에서 $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $115°$

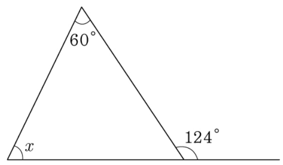
해설

$\angle x$ 의 외각의 크기는

$360° - (70° + 75° + 80° + 70°) = 65°$

$\therefore\ \angle x = 180° - 65° = 115°$

3. 다음 삼각형에서 $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $64\,°$

해설

삼각형의 한 외각의 크기는 이와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.

$\angle x + 60° = 124°$

$\therefore\ \angle x = 64°$

4. 어떤 정다각형의 한 꼭짓점에서 그을 수 있는 대각선을 모두 그었더니 정다각형이 15 개의 삼각형으로 나누어졌다. 이 정다각형의 내부에 그을 수 있는 대각선 중 길이가 가장 긴 것의 개수를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 17 개

해설

구하는 다각형을 n 각형이라 하면 n 각형의 한 꼭짓점에서 대각선을 모두 그었을 때 만들어지는 삼각형의 개수는 $(n-2)$ 개이므로

$n - 2 = 15\ \ \therefore n = 17$

정십칠각형의 한 꼭짓점에서 내부에 그을 수 있는 대각선 중 가장 길이가 긴 것은 두 개이다.

그런데 대각선은 두 개씩 겹쳐지므로 $\frac{17 \times 2}{2} =$ 17(개)

5. 다음은 육각형에서 외각의 크기의 합을 구하는 과정이다. □안에 알맞은 수를 써넣어라.

> 평각의 크기가 180°이므로
> $\angle a + \angle a' = 180^\circ$
> $\angle b + \angle b' = 180^\circ$
> $\angle c + \angle c' = 180^\circ$
> $\angle d + \angle d' = 180^\circ$
> $\angle e + \angle e' = 180^\circ$
> $\angle f + \angle f' = 180^\circ$
> (내각의 크기의 합) + (외각의 크기의 합) $=$
> $180^\circ \times \boxed{}$
> $720^\circ + \boxed{}^\circ = \boxed{}^\circ$

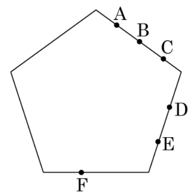
[배점 5, 상하]

▶ 답 :
▶ 답 :
▶ 답 :
▷ 정답 : 6
▷ 정답 : 360
▷ 정답 : 1080

해설

평각의 크기가 180°이므로
$\angle a + \angle a' = 180^\circ$
$\angle b + \angle b' = 180^\circ$
$\angle c + \angle c' = 180^\circ$
$\angle d + \angle d' = 180^\circ$
$\angle e + \angle e' = 180^\circ$
$\angle f + \angle f' = 180^\circ$
(내각의 크기의 합) + (외각의 크기의 합) $=$
$180^\circ \times \boxed{6}$
$720^\circ + \boxed{360}^\circ = \boxed{1080}^\circ$

6. 다음 그림과 같이 오각형 위에 점 6 개가 있다. 이 점들을 연결하여 만들 수 있는 서로 다른 삼각형, 사각형, 오각형의 개수를 각각 a 개, b 개, c 개라고 할 때 $a \times b \times c$ 의 값을 구하여라.



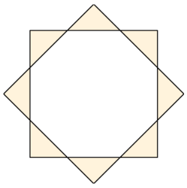
[배점 6, 상중]

▶ 답 :
▷ 정답 : 684

해설

i) 삼각형
① (한 변 위의 점 두 개와 다른 변 위의 점 한 개로 만들 수 있는 삼각형)$= 9 + 4 = 13$ 개
(A, B, C) 중 두 점과 다른 변 위의 한 점으로 만든 삼각형 : 9 개
(D, E) 두 점과 다른 변 위의 한 점으로 만든 삼각형 : 4 개
② (세 변 위의 점 한 개씩을 뽑아 만들 수 있는 삼각형) $= 3 \times 2 \times 1 = 6$ 개
$\therefore a = 13 + 6 = 19$ 개
ii) 사각형
① (한 변 위의 두 점과 다른 변 위의 두 점으로 만들 수 있는 사각형)=3 개
(A, B, C) 중 두 점과 (D, E) 두 점으로 만든 사각형 : 3 개
② (한 변 위의 두 점과 각각 다른 두 변 위의 한 점으로 만들 수 있는 사각형)$= 6 + 3 = 9$ 개
(A, B, C) 중 두 점과 각각 다른 두 변 위의 한 점으로 만든 사각형 : $3 \times 2 = 6$ 개
(D, E) 두 점과 각각 다른 두 변 위의 한 점으로 만든 사각형 : 3 개 $\therefore b = 3 + 9 = 12$
iii) 오각형
(A, B, C) 중 두 점과 D, E, F 를 사용하여 만들 수 있는 오각형 : 3 개
$\therefore c = 3$ 개
$\therefore a \times b \times c = 19 \times 12 \times 3 = 684$

7. 다음 그림은 색칠한 부분의 삼각형의 크기와 모양이 모두 같도록 정사각형 두 개를 겹쳐놓은 것이다. 이와 같은 방법으로 겹칠 때 내부에 생기는 다각형의 내각의 합이 $2520°$ 이 되는 정n 각형을 구하여라.



[배점 6, 상중]

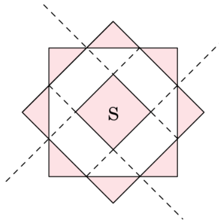
▶ 답 :

▷ 정답 : 정팔각형

해설

정n 각형을 겹치면 내부에 정$2n$ 각형이 만들어지고,
정$2n$ 각형의 내각의 합이 $180° \times (2n-2) = 2520°$ 이 되는 $n = 8$ 이다.
따라서 구하고자 하는 다각형은 정팔각형이다.

8. 다음은 정사각형과 그 정사각형을 대각선의 교점을 중심으로 $45°$ 회전시킨 도형으로 만든 모양이다. 색칠된 부분의 넓이의 합이 4 일 때, S 의 넓이를 구하여라.



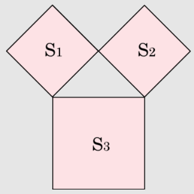
[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

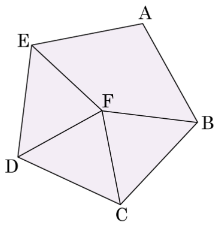
해설

색칠된 부분은 작은 직각이등변삼각형 8 개로 이루어져 있으므로
직각이등변삼각형의 넓이는 $4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$
따라서 직각이등변삼각형은 빗변이 아닌 두 변의 길이가 1 로 같다.



$S_1 + S_2 = S_3$ 이므로
직각이등변삼각형의 빗변이 아닌 두 변의 길이가 1 로 같을 때, 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 2 이다.
주어진 조건에서 S 는 색칠된 부분의 작은 직각이등변삼각형의 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이이므로 $S = 2$

9. 다음 그림에서 삼각형 EFD 는 정삼각형이고 오각형 ABCDE 는 정오각형이다. $\angle \mathrm{BFC}$ 의 크기를 구하여라.



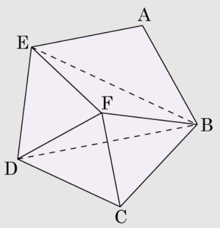
[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $84\,^{\circ}$

해설

$\overline{\mathrm{BE}}$ 와 $\overline{\mathrm{BD}}$ 를 그으면



$\triangle \mathrm{BEF}$ 와 $\triangle \mathrm{BFD}$ 에서 $\overline{\mathrm{BE}} = \overline{\mathrm{BD}}, \overline{\mathrm{BF}}$ 는 공통, $\overline{\mathrm{DF}} = \overline{\mathrm{EF}}$ 이므로 $\triangle \mathrm{BEF} \equiv \triangle \mathrm{BFD}$(SSS 합동)

$\therefore \angle \mathrm{EBF} = \angle \mathrm{FBD},\ \angle \mathrm{BEF} = \angle \mathrm{BDF}$

도형 BEFD 에서

$\angle \mathrm{EFD} = \angle \mathrm{EBD} + \angle \mathrm{BEF} + \angle \mathrm{BDF} = (\angle \mathrm{EBF} + \angle \mathrm{FBD}) + (\angle \mathrm{BEF} + \angle \mathrm{BDF}) = 2(\angle \mathrm{FBD} + \angle \mathrm{BDF}) = 60\,^{\circ}$

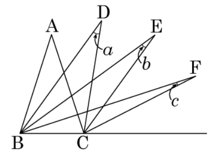
$\therefore \angle \mathrm{FBD} + \angle \mathrm{BDF} = 30\,^{\circ},\ \angle \mathrm{BFD} = \angle \mathrm{BFE} = 150\,^{\circ}$

정오각형의 한 내각의 크기는 $108\,^{\circ}$ 이므로 $\angle \mathrm{FDC} = 108\,^{\circ} - 60\,^{\circ} = 48\,^{\circ}$

$\triangle \mathrm{FDC}$ 에서 $\overline{\mathrm{FD}} = \overline{\mathrm{DC}}$ 이므로 $\angle \mathrm{DFC} = (180\,^{\circ} - 48\,^{\circ}) \div 2 = 66\,^{\circ}$

$\therefore \angle \mathrm{BFC} = \angle \mathrm{BFD} - \angle \mathrm{DFC} = 150\,^{\circ} - 66\,^{\circ} = 84\,^{\circ}$

10. 다음 그림에서 점 D, E, F는 각각 $\angle \mathrm{ABC}$의 사등분선과 $\angle \mathrm{ACB}$의 외각의 사등분선의 교점이다. $\angle \mathrm{BAC} = 36\,^{\circ}$일 때, $\angle a + \angle b + \angle c$의 크기를 구하여라.



[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $54\,^{\circ}$

해설

$\angle \mathrm{B}$ 와 $\angle \mathrm{C}$ 의 사등분된 각의 크기를 각각 $\angle x,\ \angle y$ 라 하면

삼각형의 외각의 성질에 의해서

$\triangle \mathrm{ABC}$에서 $36\,^{\circ} + 4\angle x = 4\angle y,\ \angle y - \angle x = 9\,^{\circ}$

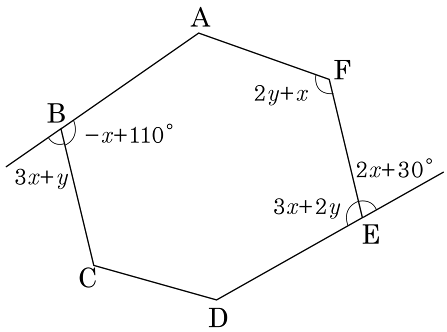
$\triangle \mathrm{DBC}$에서 $\angle a = 3\angle y - 3\angle x = 3(\angle y - \angle x) = 27\,^{\circ}$

$\triangle \mathrm{EBC}$에서 $\angle b = 2\angle y - 2\angle x = 2(\angle y - \angle x) = 18\,^{\circ}$

$\triangle \mathrm{FBC}$에서 $\angle c = \angle y - \angle x = 9\,^{\circ}$

$\therefore \angle a + \angle b + \angle c = 27\,^{\circ} + 18\,^{\circ} + 9\,^{\circ} = 54\,^{\circ}$

11. 다음 그림의 육각형에서 $\angle \mathrm{F}$ 의 크기를 구하여라.



[배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 110°

해설

$(3x+2y)+(2x+30°)=180° \cdots$ ㉠

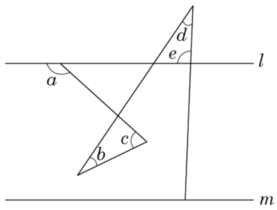
$(-x+110°)+(3x+y)=180° \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=10°,\ y=50°$

따라서 $\angle \mathrm{F}=2y+x=2\times 50°+10°=110°$

12. 다음 그림에서 $l//m$ 일 때, $\frac{1}{2}(\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e)$ 의 크기를 구하여라.

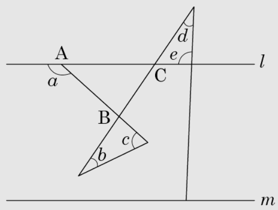


[배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 180°

해설



$\triangle \mathrm{ABC}$ 에서 외각의 성질을 이용하여

$\angle \mathrm{A}=180°-\angle a$

$\angle \mathrm{B}=180°-(\angle b+\angle c)$

$\angle \mathrm{C}=180°-(\angle d+\angle e)$

삼각형 세 내각의 크기의 합은 180° 이므로

$\angle \mathrm{A}+\angle \mathrm{B}+\angle \mathrm{C}=(180°-\angle a)+\{180°-(\angle b+\angle c)\}+\{180°-(\angle d+\angle e)\}=180°$

$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e=360°$

$\therefore\ \frac{1}{2}(\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e)=180°$

13. 한 내각의 크기와 한 외각의 크기의 비가 $7:2$ 인 정다각형의 대각선의 총수를 구하여라. [배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 27 개

해설

한 외각의 크기는 $\frac{2}{9} \times 180° = 40°$

$\frac{360°}{n} = 40°$, $n = 9$

따라서 정구각형의 대각선의 총수는

$\frac{9 \times (9-3)}{2} = 27$ (개) 이다.

14. 두 다각형 P, Q 의 한 꼭짓점에서 그을 수 있는 대각선의 비가 $1:2$ 일 때 두 다각형의 내각의 합을 모두 더하면 $1440°$ 이다. 두 다각형의 변의 개수의 합을 구하여라. [배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 개

해설

각각 n 각형, m 각형이라 하면

$(n-3):(m-3) = 1:2$

$m - 3 = 2n - 6$

$m = 2n - 3 \cdots$ ㉠

$180° \times (n-2) + 180°(m-2) = 1440°$

$n - 2 + m - 2 = 8 \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$n - 2 + 2n - 3 - 2 = 8$

$3n = 15$

$n = 5, \ m = 7$

$\therefore 12$ 개

15. 두 다각형 P, Q 의 한 꼭짓점에서 그을 수 있는 대각선의 비가 $1:2$ 일 때 두 다각형의 내각의 합을 모두 더하면 $1440°$ 이다. 두 다각형의 변의 개수의 합을 구하여라. [배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 개

해설

각각 n 각형, m 각형이라 하면

$(n-3):(m-3) = 1:2$

$m - 3 = 2n - 6$

$m = 2n - 3 \cdots$ ㉠

$180° \times (n-2) + 180°(m-2) = 1440°$

$n - 2 + m - 2 = 8 \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$n - 2 + 2n - 3 - 2 = 8$

$3n = 15$

$n = 5, \ m = 7$

$\therefore 12$ 개