

단원 형성 평가

1. 48에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱하여야 할 가장 작은 자연수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 정답: 3

해설

48을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 48} \\ 2 \overline{) 24} \\ 2 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 6} \\ 3 \end{array}$$

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로 $2^4 \times 3 \times \square$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 $\square$ 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 3이다.

2. 다음 표는 해교의 지난 중간고사와 기말고사 시험과목 일부와 그 점수이다. 다음 중 집합인 것을 모두 고르면? (정답 3개)

과목	중간	기말
국어	80	85
수학	90	80
영어	85	100
과학	70	55
사회	95	80
미술	100	95
음악	95	100
체육	75	65
도덕	100	85
한문	55	70

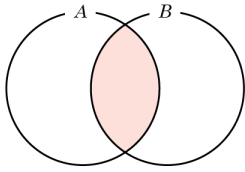
[배점 3, 중하]

- ① 지난 중간고사 점수가 80점 이상인 과목
- ② 지난 기말고사 점수 중 지난 중간고사 점수보다 높은 과목
- ③ 기말고사 때 잘 본 과목
- ④ 기말고사 때 가장 못 본 과목
- ⑤ 중간고사와 기말고사의 평균이 좋은 과목

해설

- ③ '잘' 이라는 단어의 기준이 명확하지 않아서 집합이 아니다.
- ④ '못 본' 이라는 단어의 기준은 명확하지 않으나, '가장' 이라는 단어가 있기 때문에 그 기준이 확실하다. 따라서 집합이다.
- ⑤ '좋은' 이라는 단어의 기준이 명확하지 않아서 집합이 아니다.

3. 두 집합 $A = \{x | x \text{는 } 5 \text{의 배수}\}, B = \{x | x \text{는 } 75 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 다음 벤 다이어그램으로 나타낼 때, 색칠한 부분에 해당하는 원소가 아닌 것은?

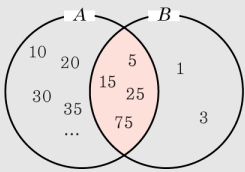


[배점 3, 중하]

- ① 5 ② 10 ③ 15 ④ 25 ⑤ 75

해설

$A = \{x | x \text{는 } 5 \text{의 배수}\} = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$,
 $B = \{x | x \text{는 } 75 \text{의 약수}\} = \{1, 3, 5, 15, 25, 75\}$ 이므로 두 집합 A, B 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 색칠한 부분에 해당하는 원소는 5, 15, 25, 75이다.

4. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

[배점 4, 중중]

- ① $n(\{2\}) < n(\{3\})$
 ② $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}$ 이면 $n(A) - n(B) = 3$ 이다.
 ③ $n(A) = 0$ 이면 $A = \emptyset$ 이다.
 ④ $n(\{50\}) - n(\{40\}) = 10$
 ⑤ $A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{보다 작은 홀수}\}$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이다.

해설

- ① $n(\{2\}) = n(\{3\}) = 1$
 ② $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}$ 이면 $n(A) - n(B) = 3 - 2 = 1$ 이다.
 ④ $n(\{50\}) - n(\{40\}) = 1 - 1 = 0$
 ⑤ $A = \{1, 2, 4, 8\}, B = \{1, 3, 5, 7\}$ 이므로 $n(A) = n(B) = 4$

5. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B, B \subset A$ 이고 $A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}, B = \{1, a-2, a, a \times 2\}$ 이다. a 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 정답: 4

해설

$A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.

$A = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로, a 값은 2, 4, 8 중 하나여야 한다.

이 중 $a-2, a, a \times 2$ 가 모두 집합 A 의 원소가 되는 a 값을 찾으려면 $a = 4$ 이다.

6. 다음 중 옳은 것은?

[배점 4, 중중]

① $A \cup \emptyset = \emptyset$

② $A \cap B = B \cup A$

③ $A \subset (A \cap B)$

④ $(A \cup B) \subset A$

⑤ $A \subset B$ 이면 $A \cup B = B$

해설

① $A \cup \emptyset = A$

② $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$

③ $(A \cap B) \subset A$

④ $A \subset (A \cup B)$

7. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이상 } 15 \text{ 이하의 자연수}\}$,
 $B = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{ 이상 } 18 \text{ 미만의 } 3 \text{의 배수}\}$ 에 대하여
 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

보기

$X \subset A, B \subset X, n(X) = 4$

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 6 개

해설

$A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

$B = \{12, 15\}$

$X \subset A, B \subset X$ 이므로 $B \subset X \subset A$

$\{12, 15\} \subset X \subset \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 12, 15는 반드시 포함하고 원소의 개수가 4개인 집합이므로 $\{10, 11, 12, 15\}, \{10, 12, 13, 15\}, \{10, 12, 14, 15\}, \{11, 12, 13, 15\}, \{11, 12, 14, 15\}, \{12, 13, 14, 15\}$ 의 6개이다.

8. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } a^2 \text{을 } 10 \text{으로 나눈 나머지, } a \text{는 자연수}\}$ 일 때, A 의 부분집합의 개수를 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 64 개

해설

제곱수의 일의 자리를 살펴보면 1^2 은 1, 2^2 은 4, 3^2 은 9, 4^2 은 6, 5^2 은 5, 6^2 은 6, 7^2 은 9, 8^2 은 4, 9^2 은 1, 10^2 은 0, 11^2 은 1, ... 이므로

$A = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$

따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$ (개)이다.

9. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = 15, n(B) = 8, n(C) = 7, n(A \cap B) = 3, A \cap C = \emptyset, n(B \cap C) = 3$ 일 때, $n(A \cup B \cup C)$ 의 값을 구하여라.

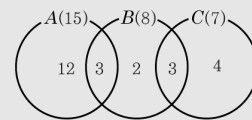
[배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 24

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore n(A \cup B \cup C) = 24$

10. 두 집합 $A = \{3, a+1, 9\}$, $B = \{a-1, a, a+3\}$ 에 대하여 $A - B = \{5, 9\}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$A - B = \{5, 9\}$ 이므로 $5 \in A$ 이다.

$$a + 1 = 5$$

$$\therefore a = 4$$

11. A 반 학생 60 명 중에서 수학을 좋아하는 학생은 33 명, 영어를 좋아하는 학생은 30 명이고, 수학과 영어 중 한 과목만 좋아하는 학생은 29 명이라고 한다. 이때, 수학과 영어도 모두 싫어하는 학생은 몇 명인지 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 14 명

해설

수학을 좋아하는 학생의 수 : $n(A) = 33$,

영어를 좋아하는 학생의 수 : $n(B) = 30$

$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 29,$$

$$n(A \cap B) = (33 + 30 - 29) \div 2 = 17,$$

$$n(A \cup B) = 46$$

$$\therefore n(U) - n(A \cup B) = 14 \text{ (명)}$$

12. 집합 $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_N\}$ 에 대하여 $f(P) = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_N$ 이라 정의한다.

집합 $A = \{3, 6, 9, 12\}$ 의 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{16}$ 이라 할 때, $f(A_1) + f(A_2) + f(A_3) + \dots + f(A_{16})$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

$A = \{3, 6, 9, 12\}$ 의 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{16}$ 이라 두면,

집합 A 의 모든 부분집합에서 하나의 원소는 모두 $2^{4-1} = 8$ (번) 씩 나온다.

$$\text{따라서 } f(A_1) + f(A_2) + f(A_3) + \dots + f(A_{16}) = 8 \times (3 + 6 + 9 + 12) = 240$$

13. 두 집합 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 4, 8\}$ 에 대하여 $X - A = \emptyset$, $n(X \cap B) = 1$ 을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 개

해설

$X - A = \emptyset$ 이면 $X \subset A$

$n(X \cap B) = 1$ 이므로 X 는 B 의 원소 하나를 포함하고 나머지 두 원소는 포함하지 않는 A 의 부분집합이다.

X 가 2를 포함하고 4, 8을 포함하지 않은 경우 (집합 X 의 갯수) $= 2^{5-3} = 4$ (개), X 가 4를 포함한 경우와 8을 포함한 경우도 마찬가지로 (집합 X 의 갯수) $= 4 \times 3 = 12$ (개)이다.

14. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 3, 5\}$ 이고 $A \cap B \neq \emptyset$ 일 때, 집합 B 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

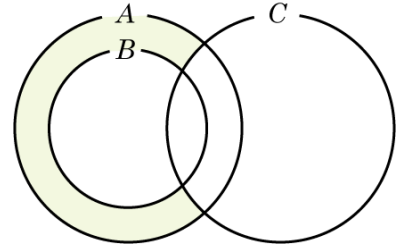
▷ 정답 : 28 개

해설

$A \cap B \neq \emptyset$ 이므로 집합 B 는 적어도 A 의 원소를 한 개 이상 가지고 있는 전체집합의 부분집합이므로

$$\begin{aligned} (\text{집합 } B \text{의 갯수}) &= (U \text{의 부분집합의 갯수}) - \\ &= 2^5 - 2^{5-3} \\ &= 2^5 - 2^2 \\ &= 32 - 4 = 28(\text{개}) \end{aligned}$$

15. 집합 $A = \{x | x < 20, x \text{는 홀수인 자연수}\}$, $B = \{2x + 1 | x \text{은 5보다 작은 자연수}\}$, $C = \left\{x \mid \frac{x+3}{10} = n, n \text{은 자연수}\right\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분의 원소의 개수를 구하여라.



[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5 개

해설

그림에 색칠된 부분은 $A - B - C$ 인 것을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} A &= \{x | x < 20, x \text{는 홀수인 자연수}\} \\ &= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \{2x + 1 | x \text{은 5보다 작은 자연수}\} \\ &= \{3, 5, 7, 9\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \left\{x \mid \frac{x+3}{10} = n, n \text{은 자연수}\right\} = \\ &= \{7, 17, 27, 37, 47, \dots\}, \end{aligned}$$

따라서 $(A - B) - C = \{1, 11, 13, 15, 19\}$ 이고 원소의 개수는 5 개이다.