

단원 형성 평가

1. 48에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱하여야 할 가장 작은 자연수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 정답: 3

해설

48을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 48} \\ 2 \overline{) 24} \\ 2 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 6} \\ 3 \end{array}$$

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로 $2^4 \times 3 \times \square$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 $\square$ 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 3이다.

2. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A - B) = 3$, $n(B - A) = 5$, $n(A \cup B) = 12$ 일 때, $n(A \cap B)$ 를 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답:

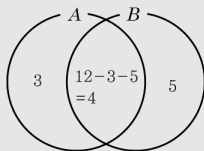
▶ 정답: 4

해설

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

$$12 = 3 + n(A \cap B) + 5 \quad \therefore n(A \cap B) = 4$$

[별해] 벤 다이어그램의 각 부분에 속하는 원소의 개수를 적어 보면



따라서 $n(A \cap B) = 4$ 이다.

3. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 15 \text{ 이하의 홀수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여

$$A \cap B^c = \{3, 5\}, B - A = \{7, 11\}, A \cap B = \{13, 15\}$$

일 때, $(A \cup B)^c$ 는?

[배점 4, 중중]

① {1}

② {7}

③ {9}

④ {1, 7}

⑤ {1, 9}

해설

$$U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}, A \cap B^c = \{3, 5\}, B - A = \{7, 11\}, A \cap B = \{13, 15\}$$

이므로 $(A \cup B)^c = \{1\}$ 이다.

4. 100 이하의 자연수 중에서 3의 배수이지만 5의 배수는 아닌 수의 개수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 정답: 27 개

해설

$$n(A) = 33, n(B) = 20, n(A \cap B) = 6 \text{ 이다.}$$

$$\therefore n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 33 - 6 = 27 \text{ 이다.}$$

5. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 25, n(B) = 16, A \cap B = B$ 일 때, $n(A \cup B) + n(A - B)$ 의 값을 구하여라.
[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$$\begin{aligned} A \cap B = B &\text{ 이므로 } B \subset A, \\ n(A \cup B) &= n(A) = 25, \\ n(A - B) &= n(A) - n(B) = 25 - 16 = 9 \\ \therefore n(A \cup B) + n(A - B) &= 25 + 9 = 34 \end{aligned}$$

6. $n(\emptyset) + n(\{0\}) + n(\{\emptyset\})$ 을 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned} n(\emptyset) &= 0, n(\{0\}) = 1, n(\{\emptyset\}) = 1 \\ n(\emptyset) + n(\{0\}) + n(\{\emptyset\}) &= 2 \end{aligned}$$

7. 두 집합

$A = \{x \mid x \text{는 } 48 \text{의 약수 중 한 자리수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } a \text{보다작은자연수}\}$ 에 대하여 $n(A) = 2 \times n(B)$ 를 만족하는 자연수 a 의 값을 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ 이고, $n(A) = 2 \times n(B)$ 에서 $n(A) = 6$ 이므로 $6 = 2 \times n(B)$ 이다. 따라서 $n(B) = 3$ 이 되고, $n(B)$ 가 3이 되려면 a 는 4가 되어야 한다.

8. 집합 $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 4, 6 을 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 64 개일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로 원소 4, 6 을 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-2} (개) 이다.

$$\begin{aligned} 2^{n-2} &= 64, 2^{n-2} = 2^6 \\ n - 2 &= 6 \text{ 이므로 } n = 8 \end{aligned}$$

9. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = 15, n(B) = 8, n(C) = 7, n(A \cap B) = 3, n(B \cap C) = 12, A \cap C = \emptyset$ 일 때, $n(A \cup B \cup C)$ 의 값을 구하여라.

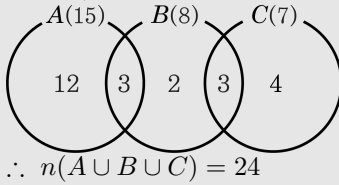
[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



10. 두 집합 $A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4, 6\}$ 에 대하여 집합 $C = \{ab | a \in A, b \in B\}$ 일 때, 집합 C 의 원소의 개수를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8개

해설

$A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4, 6\}$ 이고 집합 $C = \{ab | a \in A, b \in B\}$ 라면,

집합 A, B 의 원소를 하나씩 서로 곱한 값이 집합 C 의 원소가 된다.

따라서 집합 $C = \{2, 4, 6, 10, 12, 18, 20, 30\}$ 이므로 $n(C) = 8$

11. 집합 $A = \{x | x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 2 \text{의 배수}\}, B = \{x | x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 4 \text{의 배수}\}$ 가 있다.

이 때, $X - A = \emptyset, X \cap B = \emptyset$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 32개

해설

$A = \{x | x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 2 \text{의 배수}\}$
 $= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$

$B = \{x | x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 4 \text{의 배수}\}$
 $= \{4, 8, 12, 16\}$

$X - A = \emptyset \Rightarrow X \subset A, X \cap B = \emptyset \rightarrow$ 집합 X 는 원소 4, 8, 12, 16을 반드시 포함하지 않는다.

따라서 집합 X 의 개수는 $2^{9-4} = 32$ (개)

12. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) = \emptyset$ 이다. $A = \{1, 2, 3\}$ 일 때, $n(B) \times n(C)$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) = \emptyset$ 이면

$A - B = \emptyset, B - C = \emptyset, C - A = \emptyset,$

$A \subset B, B \subset C, C \subset A$ 이므로

$A = B = C$

따라서 $n(B) = n(C) = 3$ 이므로 $n(B) \times n(C) = 9$

13. 집합 $A_n = \{x | x \text{는 } n \text{의 약수}, n \text{은 자연수}\}$ 일 때, $(A_n \cup A_6^c)^c \cup A_n = A_6$ 을 만족하는 n 의 값을 모두 찾아라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 1

▷ 정답: 2

▷ 정답: 3

▷ 정답: 6

해설

$(A_n \cup A_6^c)^c \cup A_n = (A_n^c \cap A_6) \cup A_n = (A_6 - A_n) \cup A_n$
위의 식을 보면,
 $A_n \subset A_6$ 이므로,
6의 약수의 집합에 포함될 수 있는 약수의 집합은
1, 2, 3, 6

14. 집합 $A = \{a, d, e\}$ 이고 집합 $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ 일 때, $A \cap X = \{a, e\}$, $c \notin X$, $X \cup B = B$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: 4개

해설

집합 B 의 부분집합 중 원소 a, e 는 포함하고, 원소 c, d 는 포함하지 않는 부분집합의 수를 구한다.
 $2^{6-2-2} = 2^2 = 4$ (개)

15. 다음 중 옳지 않은 것은? [배점 6, 상중]

① $A = \{x | x \text{는 } 9 \text{의 약수}\}$ 일 때, $n(A) = 3$

② $A \subset B$ 이면 $n(A \cap B) = n(B)$

③ $n(\{2, 3, 5\}) - n(\{10, 11, 12\}) = 0$

④ $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{x | x \text{는 } 5 \text{보다 작은 자연수}\}$ 일 때, $x \in A$ 이면 $x \in B$ 이다.

⑤ $\emptyset \in \{\emptyset\}$

해설

$A \subset B$ 이면 $n(A \cap B) = n(A)$
또는 $A \supset B$ 이면 $n(A \cap B) = n(B)$