

단원 종합 평가

1. 다음 글을 읽고, 승훈이가 초대한 초등학교 친구 중 중학교가 다른 친구는 모두 몇 명인지 구하여라.

엄마 : 초대한 친구 중에 초등학교 친구와 중학교 친구는 각각 몇 명이니?

승훈 : 초등학교 친구 7명과 중학교 친구 5명요.
이 말을 들은 엄마는 12명이 먹을 수 있는 음식을 준비했다.

(그 날 저녁)

친구들 : 안녕하세요.

엄마 : 어서들 와라. 그런데! 승훈아! 왜 10명이니? 안 온 사람 있니?

승훈 : 아니요. 제가 초대한 친구는 모두 왔는데요.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5명

해설

승훈이가 초대한 초등학교 친구와 중학교 친구는 모두 10(명)이다.

또한 초등학교와 중학교가 같은 친구는 $7+5-10=2$ (명)이다.

따라서 초등학교 친구 중 중학교 친구가 다른 친구는 초등학교 친구 중 초등학교와 중학교가 같은 친구를 제외한 $7-2=5$ (명)이다.

2. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 18$, $n(B) = 35$ 이고, $A \cap B = A$ 일 때, $n(A \cup B) - n(A \cap B)$ 를 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$A \cap B = A$ 이므로 $A \subset B$ 이고, $A \cup B = B$ 이다.

$n(A \cup B) - n(A \cap B) = n(B) - n(A) = 35 - 18 = 17$

3. 두 집합 $A = \{5, 7, 10\}$, $B = \{x-4, x-2, x+1\}$ 이 서로 같을 때, x 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x-4, x-2, x+1$ 의 크기를 비교해 보면 $x-4 < x-2 < x+1$ 이므로

$A = B$ 이려면 $x-4 = 5$, $x-2 = 7$, $x+1 = 10$ 이 되어야 한다.

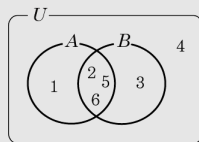
따라서 $x = 9$ 이다.

4. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 6 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
 $A - B = \{1\}, B - A = \{3\}, A^c \cap B^c = \{4\}$ 일 때,
 집합 A 는? [배점 4, 중중]

- ① $\{1, 2\}$ ② $\{1, 2, 5\}$
 ③ $\{1, 2, 6\}$ ④ $\{1, 2, 5, 6\}$
 ⑤ $\{1, 2, 3, 6\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A^c \cap B^c = \{4\} = (A \cup B)^c$
 이므로 집합 $A = \{1, 2, 5, 6\}$ 이다.



5. 두 집합 A, B 가 $n(A) = 17, n(A \cap B) = 6, n(A \cup B) = 29$ 일 때,
 집합 B 의 원소의 개수를 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 정답: 18 개

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $17 + n(B) - 6 = 29$
 $n(B) = 29 - 17 + 6 = 18$ 이다.
 따라서 $n(B) = 18$ 이다.

6. 각 자리의 숫자의 합이 5 보다 작은 두 자리 자연수의 집합을 A 라 할 때, $n(A)$ 를 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 10

해설

$A = \{10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31, 40\}$

$n(A) = 10$

7. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

[배점 5, 중상]

① $n(\{0\}) = 1$

② $\{a, b\} \in \{a, b, c\}$

③ $\emptyset \in \{1, 2, 3\}$

④ $n(\{0\}) < n(\{1\})$

⑤ $n(\{1, \{2, 3\}, 4, 5\}) = 4$

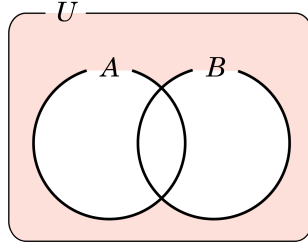
해설

② $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$

③ $\emptyset \subset \{1, 2, 3\}$

④ $n(\{0\}) = n(\{1\}) = 1$

8. 다음 벤 다이어그램에서 $n(U) = 45$, $n(A) = 17$, $n(B) = 24$, $n(A \cap B) = 8$ 일 때, 색칠한 부분에 해당하는 집합의 원소의 개수를 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

색칠하지 않은 부분이 의미하는 집합은 $A \cup B$ 이다.

따라서 색칠한 부분에 해당하는 원소의 개수는 전체 집합의 원소의 개수에서 $A \cup B$ 의 원소의 개수를 뺀 것과 같다.

$n(A \cup B) = 17 + 24 - 8 = 33$ 이므로 $n(U) - n(A \cup B) = 45 - 33 = 12$ 이다.

9. 진수네 반에서 동생이 있는 학생은 모두 25 명이다. 이 중에서 남동생이 있는 학생이 18 명, 여동생이 있는 학생이 15 명이었다. 남동생과 여동생이 모두 있는 학생은 몇 명인지 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8 명

해설

남동생과 여동생이 있는 집합을 각각 A , B 라 하면

$n(A) = 18$, $n(B) = 15$, $n(A \cup B) = 25$

$n(A \cap B) = 18 + 15 - 25 = 8$

10. 집합 $A_N = \{x | x \text{ 는 } N \text{ 의 약수}\}$ 로 정의한다. A_N 의 진부분집합의 개수가 7 개일 때, N 의 최솟값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

A_N 의 진부분집합의 개수가 7 개라면,

A_N 의 부분집합의 개수는 8 개이다.

원소의 개수가 n 개인 부분집합의 개수 $= 2^n$

집합 A_N 의 원소의 개수는 3 개이다.

N 의 약수의 개수가 3 개가 되려면 N 은 소수의 제곱수이어야 한다.

따라서 가장 작은 소수인 2의 제곱수인 4가 N 의 최솟값이다.

11. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 34$, $n(B) = 15$, $n(A^c \cap B^c) = 7$ 일 때, $n(U)$ 의 최대값과 최소값을 각각 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최대값은 56

▷ 정답 : 최소값은 41

해설

$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = 7$,

$n(A) = 34$, $n(B) = 15$ 이므로,

$0 \leq n(A \cap B) \leq 15$ 이고,

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 49 - n(A \cap B)$

따라서 $n(A \cup B)$ 의 최대값과 최소값은 각각 49, 34 이므로

$n(U)$ 의 최대값은 $49 + 7 = 56$, 최소값은 $34 + 7 = 41$

12. 세 집합 P, Q, R 에 대하여 $n(P) = 19$, $n(Q \cap R) = 7$, $n(P \cap Q \cap R) = 3$ 일 때, $n(P \cup (Q \cap R))$ 을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 23

해설

$$\begin{aligned} n(P \cup (Q \cap R)) \\ &= n(P) + n(Q \cap R) - n(P \cap Q \cap R) \\ &= 19 + 7 - 3 = 23 \end{aligned}$$

13. 원소의 개수가 40 개인 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A \cap B) = k$ 라고 할 때, $n(A) = n(A^c) = 5k$, $n(B - A) = 3k$ 이다. 이 때 $n(A^c \cap B^c)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned} n(A) = n(A^c) = 5k &\rightarrow n(U) = 40 \text{ 이므로 } 10k = 40, k = 4 \text{ 이고,} \\ n(A) = 20, n(B - A) = 12 &\text{ 이므로 } n(A \cup B) = 32 \\ \therefore n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) &= n(U) - n(A \cup B) = 40 - 32 = 8 \end{aligned}$$

14. 집합 $S = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4 \right\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합 A 가 다음과 같은 조건을 만족할 때, 집합 A 의 개수를 구하여라.

$$\bullet x \in A \text{ 이면 } \frac{1}{x} \in A$$

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 15 개

해설

주어진 집합은 원소의 역수가 반드시 A 의 원소가 되어야 하는 조건을 가진다.

$\left(\frac{1}{4}, 4\right), \left(\frac{1}{3}, 3\right), \left(\frac{1}{2}, 2\right), (1, 1)$ 은 역수 관계에 있는 두 수의 쌍이다.

(1) 원소의 개수가 1 개인 집합 : $\{1\} \Rightarrow 1$ 개

(2) 원소의 개수가 2 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}, \left\{\frac{1}{2}, 2\right\} \Rightarrow 3$ 개

(3) 원소의 개수가 3 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, 1, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, 1, 3\right\}, \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\} \Rightarrow 3$ 개

(4) 원소의 개수가 4 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 3, 4\right\}, \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3\right\} \Rightarrow 3$ 개

(5) 원소의 개수가 5 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 1, 3, 4\right\}, \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\} \Rightarrow 3$ 개

(6) 원소의 개수가 6 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3, 4\right\} \Rightarrow 1$ 개

(7) 원소의 개수가 7 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\right\} \Rightarrow 1$ 개

따라서 집합 A 의 개수는 $1+3+3+3+3+1+1 = 15$ (개)

15. 전체집합 U 의 부분집합인 집합 A, B, C 의 원소의 개수는 각각 9 개, 10 개, 11 개이다. $(A - B) \cup (B^c \cup C)^c = \emptyset$ 일 때, $n(B \cap C) - n(A \cup B)$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$(A - B) \cup (B^c \cup C)^c = \emptyset \text{ 이므로}$$

$$A - B = \emptyset \rightarrow A \subset B$$

$$(B^c \cup C)^c = \emptyset \rightarrow B - C = \emptyset \rightarrow B \subset C$$

$$\therefore n(B \cap C) - n(A \cup B) = n(B) - n(B) = 0$$