단원 종합 평가

1. 다음 글을 읽고, 승훈이가 초대한 초등학교 친구 중 중학교가 다른 친구는 모두 몇 명인지 구하여라.

> 엄마 : 초대한 친구 중에 초등학교 친구와 중학교 친구는 각각 몇 명이니?
> 승훈 : 초등학교 친구 7명과 중학교 친구 5명요.
> 이 말을 들은 엄마는 12명이 먹을 수 있는 음식을 준비했다.
> (그 날 저녁)
> 친구들 : 안녕하세요.
> 엄마 : 어서들 와라. 그런데! 승훈아! 왜 10명이니? 안 온 사람 있니?
> 승훈 : 아니요. 제가 초대한 친구는 모두 왔는데요.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5 명

해설

승훈이가 초대한 초등학교 친구와 중학교 친구는 모두 10(명)이다.
또한 초등학교와 중학교가 같은 친구는 $7+5-10=2$ (명)이다.
따라서 초등학교 친구 중 중학교 친구가 다른 친구는 초등학교 친구 중 초등학교와 중학교가 같은 친구를 제외한 $7-2=5$ (명)이다.

2. 두 집합 A, B에 대하여 $n(A)=18$, $n(B)=35$이고, $A\cap B=A$일 때, $n(A\cup B)-n(A\cap B)$를 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$A\cap B=A$이므로 $A\subset B$이고, $A\cup B=B$ 이다.
$n(A\cup B)-n(A\cap B)=n(B)-n(A)=35-18=17$

3. 두 집합 $A=\{5,\ 7,\ 10\}$, $B=\{x-4,\ x-2,\ x+1\}$ 이 서로 같을 때, x 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

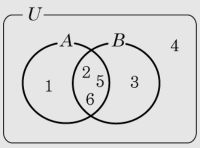
$x-4,\ x-2,\ x+1$ 의 크기를 비교해 보면 $x-4<x-2<x+1$ 이므로
$A=B$ 이려면 $x-4=5,\ x-2=7,\ x+1=10$ 이 되어야 한다.
따라서 $x=9$ 이다.

4. 전체집합 $U=\{x|x$는 6 이하의 자연수$\}$ 의 두 부분집합 A,B 에 대하여
$A-B=\{1\},B-A=\{3\}$, $A^c\cap B^c=\{4\}$ 일 때, 집합 A 는? [배점 4, 중중]

① $\{1,2\}$
② $\{1,2,5\}$
③ $\{1,2,6\}$
④ $\{1,2,5,6\}$
⑤ $\{1,2,3,6\}$

해설

$U=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A^c\cap B^c=\{4\}=(A\cup B)^c$
이므로 집합 $A=\{1,2,5,6\}$ 이다.



5. 두 집합 A ,B 가 $n(A)=17$,$n(A\cap B)=6$, $n(A\cup B)=29$ 일 때,
집합 B 의 원소의 개수를 구하여라.
[배점 4, 중중]

▶ 답 :
▷ 정답 : 18 개

해설

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$17+n(B)-6=29$
$n(B)=29-17+6=18$ 이다.
따라서 $n(B)=18$ 이다.

6. 각 자리의 숫자의 합이 5 보다 작은 두 자리 자연수의 집합을 A 라 할 때, $n(A)$ 를 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답 :
▷ 정답 : 10

해설

$A=\{10,11,12,13,20,21,22,30,31,40\}$
$n(A)=10$

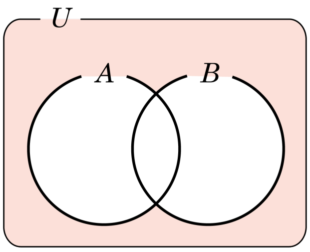
7. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)
[배점 5, 중상]

① $n(\{0\})=1$
② $\{a,\ b\}\in\{a,\ b,\ c\}$
③ $\varnothing\in\{1,\ 2,\ 3\}$
④ $n(\{0\})<n(\{1\})$
⑤ $n(\{1,\ \{2,\ 3\},\ 4,\ 5\})=4$

해설

② $\{a,\ b\}\subset\{a,\ b,\ c\}$
③ $\phi\subset\{1,\ 2,\ 3\}$
④ $n(\{0\})=n(\{1\})=1$

8. 다음 벤 다이어그램에서 $n(U) = 45$, $n(A) = 17$, $n(B) = 24$, $n(A \cap B) = 8$ 일 때, 색칠한 부분에 해당하는 집합의 원소의 개수를 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

색칠하지 않은 부분이 의미하는 집합은 $A \cup B$ 이다.
따라서 색칠한 부분에 해당하는 원소의 개수는 전체집합의 원소의 개수에서 $A \cup B$ 의 원소의 개수를 뺀 것과 같다.
$n(A \cup B) = 17 + 24 - 8 = 33$ 이므로 $n(U) - n(A \cup B) = 45 - 33 = 12$ 이다.

9. 진수네 반에서 동생이 있는 학생은 모두 25 명이다. 이 중에서 남동생이 있는 학생이 18 명, 여동생이 있는 학생이 15 명이었다. 남동생과 여동생이 모두 있는 학생은 몇 명인지 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8 명

해설

남동생과 여동생이 있는 집합을 각각 A, B 라 하면
$n(A) = 18,\ n(B) = 15,\ n(A \cup B) = 25$
$n(A \cap B) = 18 + 15 - 25 = 8$

10. 집합 $A_N = \{x | x$ 는 N 의 약수$\}$로 정의한다. A_N 의 진부분집합의 개수가 7 개일 때, N 의 최솟값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

A_N 의 진부분집합의 개수가 7 개라면,
A_N 의 부분집합의 개수는 8 개이다.
원소의 개수가 n 개인 부분집합의 개수$=2^n$
집합 A_N 의 원소의 개수는 3 개이다.
N 의 약수의 개수가 3 개가 되려면 N 은 소수의 제곱수이어야 한다.
따라서 가장 작은 소수인 2 의 제곱수인 4 가 N 의 최솟값이다.

11. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 34$, $n(B) = 15$, $n(A^c \cap B^c) = 7$ 일 때, $n(U)$ 의 최대값과 최소값을 각각 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최대값은 56

▷ 정답 : 최소값은 41

해설

$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = 7$,
$n(A) = 34,\ n(B) = 15$ 이므로,
$0 \leq n(A \cap B) \leq 15$ 이고,
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 49 - n(A \cap B)$
따라서 $n(A \cup B)$ 의 최대값과 최소값은 각각 49 , 34 이므로
$n(U)$ 의 최대값은 $49 + 7 = 56$, 최소값은 $34 + 7 = 41$

12. 세 집합 P, Q, R 에 대하여 $n(P) = 19,\ n(Q \cap R) = 7,\ n(P \cap Q \cap R) = 3$ 일 때, $n(P \cup (Q \cap R))$ 을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$n(P \cup (Q \cap R))$

$= n(P) + n(Q \cap R) - n(P \cap Q \cap R)$

$= 19 + 7 - 3 = 23$

13. 원소의 개수가 40 개인 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A \cap B) = k$ 라고 할 때, $n(A) = n(A^c) = 5k,\ n(B - A) = 3k$ 이다. 이 때 $n(A^c \cap B^c)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$n(A) = n(A^c) = 5k \rightarrow n(U) = 40$ 이므로 $10k = 40,\ k = 4$ 이고,

$n(A) = 20,\ n(B-A) = 12$ 이므로 $n(A \cup B) = 32$

$\therefore n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) = 40 - 32 = 8$

14. 집합 $S = \left\{\frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\right\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합 A 가 다음과 같은 조건을 만족할 때, 집합 A 의 개수를 구하여라.

- $x \in A$ 이면 $\frac{1}{x} \in A$

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 15 개

해설

주어진 집합은 원소의 역수가 반드시 A 의 원소가 되어야 하는 조건을 가진다.

$\left(\frac{1}{4}, 4\right), \left(\frac{1}{3}, 3\right), \left(\frac{1}{2}, 2\right), (1, 1)$ 은 역수 관계에 있는 두 수의 쌍이다.

(1) 원소의 개수가 1 개인 집합 : $\{1\} \Rightarrow 1$ 개

(2) 원소의 개수가 2 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}, \left\{\frac{1}{2}, 2\right\} \Rightarrow 3$ 개

(3) 원소의 개수가 3 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, 1, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, 1, 3\right\}, \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\} \Rightarrow 3$ 개

(4) 원소의 개수가 4 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 3, 4\right\}, \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3\right\} \Rightarrow 3$ 개

(5) 원소의 개수가 5 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 1, 3, 4\right\}, \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\} \Rightarrow 3$ 개

(6) 원소의 개수가 6 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3, 4\right\} \Rightarrow 1$ 개

(7) 원소의 개수가 7 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\right\} \Rightarrow 1$ 개

따라서 집합 A 의 개수는 $1+3+3+3+3+1+1 = 15$ (개)

15. 전체집합 U 의 부분집합인 집합 A, B, C 의 원소의 개수는 각각 9 개, 10 개, 11 개이다. $(A-B)\cup(B^C\cup C)^C=\varnothing$ 일 때, $n(B\cap C)-n(A\cup B)$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(A-B)\cup(B^c\cup C)^c=\varnothing$ 이므로

$A-B=\varnothing \rightarrow A\subset B$

$(B^c\cup C)^c=\varnothing \rightarrow B-C=\varnothing \rightarrow B\subset C$

$\therefore n(B\cap C)-n(A\cup B)=n(B)-n(B)=0$