

단원 종합 평가

1. 48에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱하여야 할 가장 작은 자연수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 3

해설

48을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 48} \\ 2 \overline{) 24} \\ 2 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 6} \\ 3 \end{array}$$

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로 $2^4 \times 3 \times \square$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 $\square$ 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 3이다.

2. 지우네 반 학생 30 명 중 게임기를 가진 학생은 21 명, 휴대전화기를 가진 학생은 19 명, 둘 다 가지고 있는 학생은 11 명이다. 이 때, 휴대전화기만 가지고 있는 학생 수를 구하여라. [배점 3, 중하]

- ① 8 명 ② 11 명 ③ 19 명
④ 21 명 ⑤ 30 명

해설

지우네 반 학생의 집합을 U , 게임기를 가진 학생의 집합을 A , 휴대전화기를 가진 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 30, n(A) = 21, n(B) = 19, n(A \cap B) = 11 \text{ 이다.}$$

$$\text{휴대전화기만 가진 학생의 집합은 } B - A \text{ 이므로 } n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 19 - 11 = 8 \text{ 이다.}$$

3. $n(\{1, 3, 5, 7\}) - n(\{1, 5, 7\}) + n(\{0, \emptyset\})$ 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 3

해설

$$n(\{1, 3, 5, 7\}) - n(\{1, 5, 7\}) + n(\{0, \emptyset\}) = 4 - 3 + 2 = 3$$

4. n 이 자연수이고 집합 A, B 가 $A = \{x \mid x = 2 \times n\}$, $B = \{x \mid x = 2 \times n + 1\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은? [배점 4, 중중]

- ① $1 \notin B$ ② $4 \in A$ ③ $7 \notin A$
④ $8 \notin A$ ⑤ $7 \in B$

해설

집합 A 의 원소는 2, 4, 6, ... 이고 집합 B 의 원소는 3, 5, 7, ... 이므로 $8 \in A$ 이다.

5. 집합 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 의 부분집합의 개수가 32 일 때, 자연수 n 의 값은? [배점 4, 중중]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$2^n = 32 \therefore n = 5$$

6. 다음 중 무한집합인 것을 모두 고르면? (정답 2개)
[배점 5, 중상]

- ① $A = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots, 100\}$
 ② $B = \{x \mid x \text{는 } 1 \text{ 보다 작은 분수}\}$
 ③ $C = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수인 짝수}\}$
 ④ $D = \{x \mid x \text{는 } 2 \times n, n \text{은 } 10 \text{보다 작은 자연수}\}$
 ⑤ $E = \left\{x \mid x \text{는 } \frac{100}{x} \text{을 자연수로 만드는 자연수}\right\}$

해설

- ① $A = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots, 100\}$ 이므로 유한 집합이다.
 ② $B = \{x \mid x \text{는 } 1 \text{ 보다 작은 분수}\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ 이므로 무한집합이다.
 ③ $C = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수인 짝수}\} = \{6, 12, \dots\}$ 이므로 무한집합이다.
 ④ $D = \{x \mid x \text{는 } 2 \times n, n \text{은 } 10 \text{보다 작은 자연수}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots, 18\}$ 이므로 유한집합이다.
 ⑤ $E = \left\{x \mid x \text{는 } \frac{100}{x} \text{을 자연수로 만드는 자연수}\right\} = \{1, 2, 4, 5, 20, 25, 50, 100\}$ 이므로 유한집합이다.

7. $n(\emptyset) + n(\{0\}) + n(\{\emptyset\})$ 을 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답:
▷ 정답: 2

해설

$$n(\emptyset) = 0, n(\{0\}) = 1, n(\{\emptyset\}) = 1$$

$$n(\emptyset) + n(\{0\}) + n(\{\emptyset\}) = 2$$

8. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수}\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

- ㉠ $X \subset A$ ㉡ $2 \in X$
 ㉢ $n(X) \leq 3$

[배점 5, 중상]

▶ 답:
▷ 정답: 11개

해설

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
 집합 X 는 2를 원소로 갖고 원소의 개수가 3개 이하인 A 의 부분집합이므로
 $\{2\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{2, 10\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4, 8\}, \{2, 4, 10\}, \{2, 6, 8\}, \{2, 6, 10\}, \{2, 8, 10\}$ 의 11개이다.

9. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 40 \text{의 약수}\}$, $B = \{2, 4, 8, 10\}$ 에 대하여 $A * B = (A \cup B) - A$ 라고 할 때, $(A * B) * A$ 를 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답:
▷ 정답: $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$

해설

$$B \subset A \text{ 이므로 } A * B = \emptyset$$

$$(A * B) * A = A$$

$$\therefore A = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$$

10. 집합 $P = \{3x + 1 | x \text{는 } 6 \text{보다 작은 자연수}\}$ 의 부분 집합 $A = \{4, 7\}, B = \{4, 10\}$ 에 대하여 $A \cap X^c = B \cap X^c$ 를 만족하는 집합 P 의 부분집합 X 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8 개

해설

$P = \{3x + 1 | x \text{는 } 6 \text{보다 작은 자연수}\}$
 $= \{4, 7, 10, 13, 16\}$
 $A = \{4, 7\}, B = \{4, 10\}$
 $A \cap X^c = B \cap X^c \rightarrow A - X = B - X$ 이므로 X 는 원소 7, 10 을 반드시 포함하는 P 의 부분집합 이다.
 따라서 부분집합 X 의 개수는 $2^{5-2} = 8$ (개)

11. 집합 $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중, 두 번째로 작은 원소가 5 인 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 개

해설

$\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중, 두 번째로 작은 원소가 5 인 부분집합을 찾으려면,
 5 는 반드시 포함되고 1, 2, 3 중에 하나만 포함되어야 한다.
 (1) 1 과 5 는 포함되고, 2, 3 은 포함되지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-2} = 4$ (개)
 (2) 2 와 5 는 포함되고, 1, 3 은 포함되지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-2} = 4$ (개)
 (3) 3 과 5 는 포함되고, 1, 2 는 포함되지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-2} = 4$ (개)
 따라서 $4 + 4 + 4 = 12$ (개)

12. $n(\{0, \emptyset, \{0, 2\}, \{1\}\}) \times n(\{0, 1\}) - n(\emptyset)$ 를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$n(\{0, \emptyset, \{0, 2\}, \{1\}\}) \times n(\{0, 1\}) - n(\emptyset) = 4 \times 2 - 0 = 8$$

13. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = n(C)$ 이고, $(A \cap B^c) \cup (B \cap C^c) = \emptyset$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은? [배점 5, 상하]

① $n(A - C) = 0$

② $\frac{n(C)}{n(A)} \times n(B) = n(C)$

③ $n(A \cap C) = n(B)$

④ $\frac{n(A) + n(C)}{2} = n(B)$

⑤ $n((A \cap C) - B) = n(A \cup B \cup C)$

해설

$(A \cap B^c) \cup (B \cap C^c) = \emptyset$ 이면 $A - B = \emptyset, B - C = \emptyset$ 이므로 $A \subset B, B \subset C$
 또, $n(A) = n(C), A \subset C$ 이므로 $A = C$
 따라서 $A = B = C$
 ① $n(A - C) = 0 \rightarrow A = C$ 이므로 옳다.
 ② $\frac{n(C)}{n(A)} \times n(B) = n(C) \rightarrow 1 \times n(B) = n(C)$ 이므로 옳다.
 ③ $n(A \cap C) = n(B) \rightarrow$ 옳다.
 ④ $\frac{n(A) + n(C)}{2} = n(B) \rightarrow$ 옳다.
 ⑤ $n((A \cap C) - B) = n(A \cup B \cup C) \rightarrow n((A \cap C) - B) = 0$ 이므로 옳지 않다.

14. 집합 $A = \{x | x \text{는 } 8 \text{보다 큰 } 4 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가?

보기

- ㉠ A 는 무한집합이다.
- ㉡ A 는 유한집합이다.
- ㉢ $A = \{1, 2, 4\}$
- ㉣ $A = \emptyset$
- ㉤ $A = \{\emptyset\}$
- ㉥ $A = \{0\}$
- ㉦ $n(A) = 1$
- ㉧ $n(A) = 0$

[배점 6, 상중]

- ① ㉠, ㉢, ㉦ ② ㉡, ㉢, ㉧ ③ ㉠, ㉢, ㉧
 ④ ㉡, ㉣, ㉧ ⑤ ㉡, ㉣, ㉦

해설

4의 약수 : 1, 2, 4
 8의 배수 : 8, 16, 24, ...
 따라서 8보다 큰 4의 약수는 없다.
 즉 $A = \emptyset$ 이다.

15. 75 명의 학생을 대상으로 조사를 하였더니 영어학원을 다니는 학생은 24 명, 수학을학원을 다니지 않는 학생은 32 명이였다. 영어학원과 수학을학원을 모두 다니지 않는 학생 수의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

조사한 학생의 집합을 U , 영어학원을 다니는 학생의 집합을 A , 수학을학원을 다니는 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 75, n(A) = 24, n(B^c) = 32$$

$$n(B) = n(U) - n(B^c) = 75 - 32 = 43$$

$A \cap B = \emptyset$ 일 때, $n(A \cup B)$ 이 최대이므로 $n(A \cup B)$ 의 최댓값은 $24 + 43 = 67$ 이다.

$$\therefore (n((A \cup B)^c) \text{의 최솟값}) = m = 75 - 67 = 8$$

$A \subset B$ 일 때, $n(A \cup B)$ 이 최소이므로 $n(A \cup B)$ 의 최솟값은 $n(B) = 43$

$$\therefore (n((A \cup B)^c) \text{의 최댓값}) = M = 75 - 43 = 32$$

따라서 $M - m = 32 - 8 = 24$ 이다.