단원 종합 평가

1. 다음 중 공집합이 아닌 유한집합을 모두 고르면? (정답 2 개) [배점 3, 하상]

① $\{x \mid x \leq 1, x$는 자연수$\}$

② $\{x \mid x$는 5로 나누었을 때 나머지가 3인 자연수$\}$

③ $\{x \mid x < 2, x$는 소수$\}$

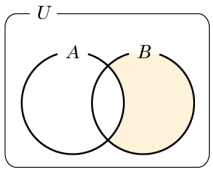
④ $\{x \mid x$는 4의 약수 중 홀수$\}$

⑤ $\{x \mid x$는 25보다 큰 25의 배수$\}$

해설

① $\{1\}$
② $\{3,\ 8,\ 13,\ \cdots\}$
③ $\varnothing$
④ $\{1\}$
⑤ $\{50,\ 75,\ 100,\ \cdots\}$

2. $n(U) = 15, n(A - B) = 5, n(A) = 8, n(B^c) = 8$ 일 때, 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합의 원소의 개수는?



[배점 3, 하상]

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개
④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$n(A) = 8, n(A - B) = 5$ 이므로 $n(A \cap B) = 3$ 이다.
$n(B^c) = 8$ 이므로 $n(B) = n(U) - n(B^c) = 15 - 8 = 7$ 이다.
따라서 $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 7 - 3 = 4$ 이다.

3. 48에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱하여야 할 가장 작은 자연수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

48을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2)\,48 \\ 2)\,24 \\ 2)\,12 \\ 2)\,6 \\ \hline 3 \end{array}$$

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로 $2^4 \times 3 \times \square$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 $\square$의 값 중에서 가장 작은 자연수는 3이다.

4. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? [배점 3, 중하]

① $\{a, b, c\} \cap \varnothing = \varnothing$

② $\{피, 아, 노\} \cup \{피, 노, 키, 오\} = \{피, 아, 노, 키, 오\}$

③ $\{♠, ♣, ♥, ♡\} \cap \{♣, ☆\} = \{♠, ♣, ♥, ♡, ☆\}$

④ $\{x|x$는 10 이하의 홀수$\} \cap \{1, 2, 5\} = \{1, 2, 5\}$

⑤ $\{x|x$는 12 의 약수$\} \cap \{x|x$는 18 의 약수$\} = \{x|x$는 6 의 약수$\}$

해설

⑤ $\{x|x$는 $\square$ 의 약수$\} \cap \{x|x$는 $\triangle$의 약수$\} = \{x|x$는 $\bigcirc$ 의 약수$\}$ 일 때, $\bigcirc$는 $\square$, $\triangle$ 의 최대 공약수이다.

5. 두 집합 A, B에 대하여 $n(A) = 18$, $n(B) = 35$이고, $A \cap B = A$일 때, $n(A \cup B) - n(A \cap B)$를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 17

해설

$A \cap B = A$이므로 $A \subset B$이고, $A \cup B = B$ 이다.
$n(A \cup B) - n(A \cap B) = n(B) - n(A) = 35 - 18 = 17$

6. 집합 $A = \{0, 2, \{4\}, \{6, 8\}, \varnothing\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?. [배점 4, 중중]

① $\varnothing \in A$

② $\{0, 2, \{4\}\} \subset A$

③ $n(A) = 5$

④ $\{4\} \subset A$

⑤ $\{6, 8\} \in A$

해설

④ $\{4\} \in A$

7. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 이고 $A = \{x \mid x$는 8의 약수$\}$, $B = \{1,\ a-2,\ a,\ a \times 2\}$ 이다. a 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.
$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$ 이므로, a 값은 2, 4, 8 중 하나여야 한다.
이 중 $a-2$, a, $a \times 2$ 가 모두 집합 A 의 원소가 되는 a 값을 찾으면 $a = 4$ 이다.

8. 두 집합 $A = \{3, 5, a+4, 9\}$, $B = \{1, 3, 6, b+1\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{3, 7\}$ 일 때,
$A \cup B$ 의 모든 원소의 합을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 31

해설

$A \cap B = \{3, 7\}$ 이므로 $7 \in A$ 이다. $a+4 = 7$ 이어야 한다.
그러므로 $a = 3$ 이다.
$7 \in B$ 이므로 $b+1 = 7$ 이어야 한다. 그러므로 $b = 6$ 이다.
$A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$ 이므로 모든 원소의 합은 $1+3+5+6+7+9 = 31$ 이 된다.

9. 우리 반 40 명의 학생 중 미술시간에 물감을 준비해 온 학생은 26 명, 색연필을 준비해 온 학생은 23 명, 아무것도 준비하지 않은 학생은 3 명이다. 물감과 색연필 두 가지를 모두 준비해 온 학생 수를 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 13명

해설

$n(U) = 40, n(A) = 26, n(B) = 23$
$n(A \cup B) = 40 - 3 = 37$
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 이므로
$37 = 26 + 23 - n(A \cap B)$ 이다.
따라서 $n(A \cap B) = 13$ 이다.

10. 두 집합 A ,B 가 $n(A) = 17$,$n(A \cap B) = 6$, $n(A \cup B) = 29$ 일 때,
집합 B 의 원소의 개수를 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 18 개

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$17 + n(B) - 6 = 29$
$n(B) = 29 - 17 + 6 = 18$ 이다.
따라서 $n(B) = 18$ 이다.

11. 각 자리의 숫자의 합이 5 보다 작은 두 자리 자연수의 집합을 A 라 할 때, $n(A)$ 를 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A = \{10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31, 40\}$

$n(A) = 10$

12. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 $4, 6$ 을 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 64 개일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로 원소 4, 6 을 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-2} (개) 이다.

$2^{n-2} = 64,\ 2^{n-2} = 2^6$

$n - 2 = 6$ 이므로 $n = 8$

13. 다음 두 집합 $A = \{x \mid x$는 24의 약수$\}$, $B = \{1,\ 3,\ 8,\ a \times 3,\ 2,\ b + 3,\ c,\ 12\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 일 때, 자연수 a 가 될 수 있는 최댓값과 최솟값의 차이를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$,

$B = \{1,\ 2,\ 3,\ 8,\ 12,\ a \times 3,\ b + 3,\ c\}$ 이므로,

$a \times 3,\ b + 3,\ c$ 는 각각 4, 6, 24 중 하나여야 한다.

$a \times 3 = 4$ 일 때 a 값이 최소가 되고, $a \times 3 = 24$ 일 때 a 값이 최대가 되지만, $a \times 3 = 4$ 일 때의 a 값은 자연수가 아니므로 부적합하다.

따라서 a 값이 최소일 때는 $a \times 3 = 6$ 일 때이다.

최댓값 : $a = 8$

최솟값 : $a = 2$

따라서 $8 - 2 = 6$

14. 다음 중 무한집합이 아닌 것을 모두 고르면 ? (정답 3개) [배점 5, 상하]

① $\{x|x$는 짝수인 소수$\}$

② $\{x|x$는 1과 2사이의 유리수$\}$

③ $\left\{x|x\text{는 }\dfrac{4}{3x}=k,\ k\text{는 자연수}\right\}$

④ $\{2x+1|x,\ x$는 11보다 큰 소수$\}$

⑤ $\{[x]|1.5\le x\le 3.5,\ x$는 유리수$\}$ (단, $[x]$ 는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

해설

① $\{x|x$는 짝수인 소수$\}$ → 짝수인 소수는 2 뿐이다.

② $\{x|x$는 1과 2사이의 유리수$\}$ → 1 과 2 사이의 유리수는 무수히 많다.

③ $\left\{x|x\text{는 }\dfrac{4}{3x}=k,\ k\text{는 자연수}\right\}$ → $\dfrac{4}{3x}$ 가 자연수가 되는 x 의 값은 $\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}$

④ $\{2x+1|x,\ x$는 11보다 큰 소수$\}$ → 11 보다 큰 소수는 무수히 많다.

⑤ $\{[x]|1.5\le x\le 3.5,\ x$는 유리수$\}$ (단, $[x]$ 는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

→ $[x]$ 가 될 수 있는 수는 $1,2,3$ 뿐이다.

15. 집합 $A_n=\{x|x$는 n의 약수, n은 자연수$\}$ 일 때, $(A_n\cup A_6^c)^c\cup A_n=A_6$ 을 만족하는 n 의 값을 모두 찾아라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 6

해설

$(A_n\cup A_6^c)^c\cup A_n=(A_n^c\cap A_6)\cup A_n=(A_6-A_n)\cup A_n$

위의 식을 보면,

$A_n\subset A_6$ 이므로,

6 의 약수의 집합에 포함될 수 있는 약수의 집합은

$1,2,3,6$