

단원 종합 평가

1. 경주는 다음과 같은 내용이 기록된 파일을 각각 아래 컴퓨터 폴더에 분류하여 저장하려고 한다. 다음 파일이 들어갈 폴더를 찾아라.



A 파일
〈100보다 작은 홀수의 모임〉
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ..., 99

B 파일
〈1보다 크고 2보다 작은 분수의 모임〉
 $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$

C 파일
〈2008 베이징 올림픽 채택 종목〉
수영, 역도, 마라톤, 레슬링, ...

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : A 파일 : 유한집합 폴더

▶ 정답 : B 파일 : 무한집합 폴더

▶ 정답 : C 파일 : 유한집합 폴더

해설

A 파일 : 100보다 작은 홀수의 모임을 집합으로 나타내면 $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots, 99\}$ 이므로 유한집합,

B 파일 : 1보다 크고 2보다 작은 분수의 모임을 집합으로 나타내면 $\left\{\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots\right\}$ 이므로 무한집합,

C 파일 : 2008 베이징 올림픽 채택 종목을 집합으로 나타내면 $\{\text{수영, 역도, 육상, 레슬링, } \dots, \text{마라톤}\}$ 이므로 유한집합이다.

따라서 무한집합 폴더에 들어갈 파일은 B 파일이고, 유한집합 폴더에 들어갈 파일은 A 파일과 C 파일이다.

2. $\{1\} \subset A \subset \{1, 2, 3, 4\}$ 를 만족하는 집합 A 의 개수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 8 개

해설

집합 A 는 $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합이면서 1을 포함하는 집합이므로 $\{2, 3, 4\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

$$2^3 = 8 \text{ (개)}$$

3. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

[배점 4, 중중]

① $A = \emptyset$ 이면 $n(A) = 0$ 이다.

② $B \subset A$ 이면 $n(B) < n(A)$ 이다.

③ $A = B$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이다.

④ $n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$ 이다.

⑤ $A = \{0\}$ 이면 $n(A) = 0$ 이다.

해설

② $B \subset A$ 이면 $n(B) \leq n(A)$

④ $A = \{0\}, B = \{1\}$ 이면 $n(A) = n(B) = 1$ 이지만 $A \neq B$

⑤ $A = \{0\}$ 이면 $n(A) = 1$

4. 집합 $A = \{1, 2, \emptyset, \{1, 2\}\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은? [배점 4, 중중]

- ① $\{1, 2\} \subset A$ ② $\emptyset \subset A$
 ③ $\{\emptyset, 2\} \subset A$ ④ $A \subset A$
 ⑤ $\{\emptyset, \{1, 2\}\} \not\subset A$

해설

$\{\emptyset, \{1, 2\}\} \subset A$ 이다.

5. 집합 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, 2 를 반드시 포함하고 n 을 포함하지 않는 부분집합의 개수가 16 개 일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 7

해설

$2^{(1, 2, n \text{을 제외한 원소의 개수})} = 2^{n-3} = 16 = 2^4 \therefore n = 7$

6. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 소수}\}$ 에 대하여 집합 A 의 모든 부분집합의 원소의 합을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 136

해설

$A = \{2, 3, 5, 7\}$ 의 부분집합은

$\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{2, 3, 5, 7\}$ 중에 원소 2, 3, 5, 7은 8 번씩 포함되므로 부분집합의 원소의 합은 $(2+3+5+7) \times 8 = 136$ 이다.

7. 다음 안에 알맞은 세 자연수의 합을 구하여라.

보기

- ㉠ $n(\{x \mid x \text{는 } \square \text{미만의 자연수}\}) = 4$
 ㉡ $n(\{a, b, c, d\}) - n(\{b, c, d\}) = \square$
 ㉢ $A \subset \{1, 2, 3\}$ 이고 $n(A) = 2$ 를 만족하는 집합은 $\square$ 개이다.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 8

해설

- ㉠ $n(\{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 미만의 자연수}\}) = 4$
 ㉡ $n(\{a, b, c, d\}) - n(\{b, c, d\}) = 1$
 ㉢ $A \subset \{1, 2, 3\}$ 이고 $n(A) = 2$ 를 만족하는 집합 A 는 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ 의 3개 따라서, $4+1+3=8$

8. 전체집합 $U = \{10, 20, 30, 40, 50\}$ 의 두 부분집합 A, B 가 $A \cup B = U, A \cap B = \{30, 50\}$ 을 만족한다. 집합 A, B 의 원소의 합을 각각 $S(A), S(B)$ 라고 할 때, $S(A) + S(B)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 230

해설

$S(A) + S(B)$ 의 값을 구하는 것이므로
각 원소를 아무렇게나 배열해도 원소의 합은 같다.
 $\therefore 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + (30 + 50) = 230$

9. 다음 중에서 옳은 것을 모두 고르면?

[배점 5, 중상]

- ① $A \cap B = A$ 이면 $n(A) < n(B)$
 ② $A \cap B = \emptyset$ 이면 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
 ③ $A - B = \emptyset$ 이면 $A = B$
 ④ $A \cup B = B$ 이면 $B - A = \emptyset$
 ⑤ $A \cap B^c = A$ 이면 $n(A \cap B) = 0$

해설

- ① $A \cap B = A$ 이면 $n(A) \leq n(B)$
 ③ $A - B = \emptyset$ 이면 $A \subset B$
 ④ $A \cup B = B$ 이면 $A \subset B$ 이므로 $A - B = \emptyset$

10. 집합 $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_N\}$ 에 대하여 $f(P) = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_N$ 이라 정의한다.

집합 $A = \{3, 6, 9, 12\}$ 의 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{16}$ 이라 할 때, $f(A_1) + f(A_2) + f(A_3) + \dots + f(A_{16})$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

$A = \{3, 6, 9, 12\}$ 의 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{16}$ 이라 두면,
집합 A 의 모든 부분집합에서 하나의 원소는 모두 $2^{4-1} = 8$ (번) 씩 나온다.
따라서 $f(A_1) + f(A_2) + f(A_3) + \dots + f(A_{16}) = 8 \times (3 + 6 + 9 + 12) = 240$

11. 집합 $P = \{3x + 1 | x \text{는 } 6 \text{보다 작은 자연수}\}$ 의 부분집합 $A = \{4, 7\}, B = \{4, 10\}$ 에 대하여 $A \cap X^c = B \cap X^c$ 를 만족하는 집합 P 의 부분집합 X 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8개

해설

$P = \{3x + 1 | x \text{는 } 6 \text{보다 작은 자연수}\}$
 $= \{4, 7, 10, 13, 16\}$
 $A = \{4, 7\}, B = \{4, 10\}$
 $A \cap X^c = B \cap X^c \rightarrow A - X = B - X$ 이므로 X 는 원소 7, 10 을 반드시 포함하는 P 의 부분집합이다.
 따라서 부분집합 X 의 개수는 $2^{5-2} = 8$ (개)

12. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ 에 대하여 $B \cap X = B$, $(A - B) \cap X = \{1, 3\}$ 을 만족하는 U 의 부분집합 X 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2 개

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
 $A = \{1, 2, 3, 4\}$,
 $B = \{4, 5, 6\}$ 이고,
 $B \cap X = B \Rightarrow B \subset X$,
 $(A - B) \cap X = \{1, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \cap X = \{1, 3\}$
 이므로
 X 는 원소 1, 3, 4, 5, 6 을 반드시 포함하는 집합 U 의 부분집합이다.
 따라서 집합 X 의 개수는 $2^{6-5} = 2$ (개)

13. 자연수 k 에 대하여 집합 $A_k = \{x | k < x \leq 20k \text{인 자연수}\}$ 일 때, $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_{10})$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A_1 = \{2, 3, \dots, 20\}$
 $A_2 = \{3, 4, \dots, 40\}$
 $A_3 = \{4, 5, \dots, 60\}$
 $\vdots$
 $A_{10} = \{11, 12, 13, \dots, 200\}$
 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{10} = \{11, 12, \dots, 20\}$
 $\therefore n(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{10}) = 10$

14. 어느 학급에서 ‘자주 먹는 고기의 종류’ 를 조사한 결과, 모든 학생이 닭고기, 돼지고기, 소고기 중 적어도 하나의 고기를 선택하였다. 닭고기를 선택한 학생은 31 명, 돼지고기를 선택한 학생은 27 명, 소고기를 선택한 학생은 23 명이였다. 또, 세 종류의 고기 중 한 종류만 선택한 학생 중 14 명은 닭고기를, 15 명은 돼지고기를, 9 명은 소고기를 선택하였다. 세 종류의 고기를 모두 선택한 학생이 7 명일 때, 이 학급의 학생 수를 구하여라. [배점 6, 상중]

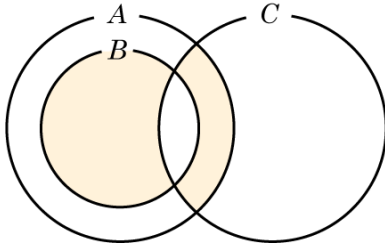
▶ 답 :

▷ 정답 : 56 명

해설

닭고기를 선택한 학생의 집합을 A , 돼지고기를 선택한 학생의 집합을 B , 소고기를 선택한 학생의 집합을 C 라 두면,
 닭고기만을 선택한 학생 수는 $n(A) - n(A \cap B) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) = 14$,
 돼지고기만을 선택한 학생 수는 $n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 15$,
 소고기만을 선택한 학생 수는 $n(C) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) = 9$,
 위의 세 식을 모두 더하면,
 $n(A) + n(B) + n(C) - 2(n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + 3n(A \cap B \cap C) = 38$,
 $n(A) = 31, n(B) = 27, n(C) = 23, n(A \cap B \cap C) = 7$ 이므로
 $31 + 27 + 23 - 2(n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + 21 = 38$
 $\rightarrow n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 32$
 모든 학생이 닭고기, 돼지고기, 소고기 중 적어도 하나의 고기를 선택하였으므로,
 $n(U) = n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - (n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + n(A \cap B \cap C)$
 $= 31 + 27 + 23 - 32 + 7 = 56$

15. 다음 벤 다이어그램에서 $n(A) = 20$, $n(B) = 10$,
 $n(C) = 15$, $n(B \cup C) = 21$, $n(A \cup B \cup C) = 25$
 일 때, 빗금 친 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수를
 구하여라.



[매점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 개

해설

$B \subset A$ 이므로 $A \cup B \cup C = A \cup C$ 이다.

$n(A \cup B \cup C) = n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C)$
 $\rightarrow n(A \cap C) = 10$,

$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C) \rightarrow n(B \cap C) =$
 4 ,

빗금 친 부분은 $(B - C) \cup ((A \cap C) - (B \cap C))$
 이므로,

$n((B - C) \cup ((A \cap C) - (B \cap C))) = n(B) - n(B \cap C)$
 $+ n(A \cap C) - n(B \cap C) = 10 - 4 + 10 - 4 = 12$