

단원 종합 평가

1. 다음 설명 중 옳은 것은?

[배점 3, 중하]

- ① $n(\emptyset) = 1$
- ② $n(\{a, b, c, d\}) = \{4\}$
- ③ $A = \{1, 2, 3\}$ 이면 $n(A) = 5$
- ④ $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$ 이면 $n(A) = 4$
- ⑤ $A = \{x \mid x \text{는 } 1 \text{보다 작은 자연수}\}$ 이면 $n(A) = \emptyset$

해설

- ① 공집합은 원소의 개수가 0개이므로 $n(\emptyset) = 0$ 이다.
- ② $n(\{a, b, c, d\}) = 4$
- ③ $A = \{1, 2, 3\}$ 이면 $n(A) = 3$ 이다.
- ⑤ 집합 A 는 공집합이므로 $n(A) = 0$ 이다.

2. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B, B \subset A$ 이고, $A = \{x \mid x \text{는 } 28 \text{의 약수}\}$ 일 때, $n(A) + n(B)$ 의 값을 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 12

해설

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.
 $A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$, $B = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$ 이고, $n(A) = 6, n(B) = 6$ 이다.
 따라서, $n(A) + n(B) = 12$ 이다.

3. 다음 중 옳은 것은?

[배점 4, 중중]

- ① $n(\emptyset) = n(\{0\})$
- ② $n(\{1, 2, 4\}) - n(\{1, 4\}) = 2$
- ③ $n(\{4\}) = 4$
- ④ $n(\{x \mid x \text{는 } 40 \text{ 이하의 짝수}\}) = 40$
- ⑤ $n(\{x \mid x \text{는 } 2 < x < 4 \text{인 홀수}\}) = 1$

해설

- ① $n(\emptyset) = 0, n(\{0\}) = 1$
- ② $n(\{1, 2, 4\}) - n(\{1, 4\}) = 3 - 2 = 1$
- ③ $n(\{4\}) = 1$
- ④ $n(\{2, 4, 6, \dots, 40\}) = 20$
- ⑤ $n(\{3\}) = 1$

4. 집합 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, 2 를 반드시 포함하고 n 을 포함하지 않는 부분집합의 개수가 16 개 일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 7

해설

$2^{(1, 2, n \text{을 제외한 원소의 개수})} = 2^{n-3} = 16 = 2^4 \therefore n = 7$

5. 두 집합 A, B 가 $n(A) = 17, n(A \cap B) = 6, n(A \cup B) = 29$ 일 때,
집합 B 의 원소의 개수를 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 18 개

해설

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ 29 &= 17 + n(B) - 6 \\ n(B) &= 29 - 17 + 6 = 18 \text{ 이다.} \\ \text{따라서 } n(B) &= 18 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

6. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 27 \text{의 약수}\}$ 일 때, 다음을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라.

보기

$$\{1\} \subset B \subset A, n(B) = 3$$

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 3 개

해설

$A = \{1, 3, 9, 27\}$
집합 B 는 원소 1 을 포함한 집합 A 의 부분집합
중 원소의 개수가 3 개인 집합이므로
 $\{1, 3, 9\}, \{1, 3, 27\}, \{1, 9, 27\}$ 의 3 개이다.

7. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

[배점 5, 중상]

① $n(\{0\}) = 1$

② $\{a, b\} \in \{a, b, c\}$

③ $\emptyset \in \{1, 2, 3\}$

④ $n(\{0\}) < n(\{1\})$

⑤ $n(\{1, \{2, 3\}, 4, 5\}) = 4$

해설

② $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$

③ $\emptyset \subset \{1, 2, 3\}$

④ $n(\{0\}) = n(\{1\}) = 1$

8. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

[배점 5, 중상]

① $A \cap B \neq B \cap A$

② $A \subset B$ 이면 $A \cup B = A$

③ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = B$

④ $n(A \cap B \cap \emptyset) = 0$

⑤ $A \subset (A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

① $A \cap B = B \cap A$

② $A \subset B$ 이면 $A \cup B = B$

③ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$

⑤ $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

9. 세 집합 A, B, C 에 대하여

$n(A) = 40, n(B) = 24, n(C) = 16, n(A \cup B) = 50,$
 $n(B \cap C) = 10, A \cap C = \emptyset$ 일 때,
 $n(A \cup B \cup C) + 2 \times n(A \cap B \cap C)$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 56

해설

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
 $A \cap C = \emptyset$ 이므로 $A \cap B \cap C = \emptyset$ 이 된다.
 $n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A \cup B)$ 이고
 $A \cap B \cap C = \emptyset$ 이므로 $n(A \cap B) = 40 + 24 - 50 = 14$
 $\therefore n(A \cup B \cup C) = 40 + 24 + 16 - 14 - 10 - 0 + 0 = 56$
따라서 정답은 $56 + 2 \times 0 = 56$

10. 집합 $A_N = \{x | x \text{ 는 } N \text{ 의 약수}\}$ 로 정의한다. A_N 의 진부분집합의 개수가 7 개일 때, N 의 최솟값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

A_N 의 진부분집합의 개수가 7 개라면,
 A_N 의 부분집합의 개수는 8 개이다.
원소의 개수가 n 개인 부분집합의 개수 $= 2^n$
집합 A_N 의 원소의 개수는 3 개이다.
 N 의 약수의 개수가 3 개가 되려면 N 은 소수의 제곱수이어야 한다.
따라서 가장 작은 소수인 2 의 제곱수인 4 가 N 의 최솟값이다.

11. 집합 $U = \{x | x \leq 10, x \text{ 는 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 가 있다. $A \cap B = \emptyset, A \cup B = U$ 이고, A 의 모든 원소의 합은 15 일 때, 집합 B 의 모든 원소의 합을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 40

해설

$U = \{x | x \leq 10, x \text{ 는 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$
 $A \cap B = \emptyset, A \cup B = U$ 집합 A, B 는 서로소이고, 전체집합 U 의 모든 원소를 나누어 가진다.
전체집합 U 의 모든 원소의 합은 $1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$ 이고,
 A 의 모든 원소의 합은 15 이므로
집합 B 의 모든 원소의 합은 $55 - 15 = 40$

12. 자연수 k 에 대하여 집합 $A_k = \{x | k < x \leq 20k \text{ 인 자연수}\}$ 일 때, $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_{10})$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A_1 = \{2, 3, \dots, 20\}$
 $A_2 = \{3, 4, \dots, 40\}$
 $A_3 = \{4, 5, \dots, 60\}$
 $\vdots$
 $A_{10} = \{11, 12, 13, \dots, 200\}$
 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{10} = \{11, 12, \dots, 20\}$
 $\therefore n(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{10}) = 10$

13. $n(\{0, \emptyset, \{0, 2\}, \{1\}\}) \times n(\{0, 1\}) - n(\emptyset)$ 를 구하여라.
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 8

해설

$$n(\{\{0\}, \emptyset, \{0, 2\}, \{1\}\}) \times n(\{0, 1\}) - n(\emptyset) = 4 \times 2 - 0 = 8$$

14. 다음 중 옳지 않은 것은? [배점 6, 상중]

① $A = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{의 약수}\}$ 일 때, $n(A) = 3$

② $A \subset B$ 이면 $n(A \cap B) = n(B)$

③ $n(\{2, 3, 5\}) - n(\{10, 11, 12\}) = 0$

④ $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{보다 작은 자연수}\}$ 일 때, $x \in A$ 이면 $x \in B$ 이다.

⑤ $\emptyset \in \{\emptyset\}$

해설

$A \subset B$ 이면 $n(A \cap B) = n(A)$
또는 $A \supset B$ 이면 $n(A \cap B) = n(B)$

15. 75 명의 학생을 대상으로 조사를 하였더니 영어학원을 다니는 학생은 24 명, 수학학원을 다니지 않는 학생은 32 명이였다. 영어학원과 수학학원을 모두 다니지 않는 학생 수의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 24

해설

조사한 학생의 집합을 U , 영어학원을 다니는 학생의 집합을 A , 수학학원을 다니는 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 75, n(A) = 24, n(B^c) = 32$$

$$n(B) = n(U) - n(B^c) = 75 - 32 = 43$$

$A \cap B = \emptyset$ 일 때, $n(A \cup B)$ 이 최대이므로 $n(A \cup B)$ 의 최댓값은 $24 + 43 = 67$ 이다.

$$\therefore (n((A \cup B)^c) \text{의 최솟값}) = m = 75 - 67 = 8$$

$A \subset B$ 일 때, $n(A \cup B)$ 이 최소이므로 $n(A \cup B)$ 의 최솟값은 $n(B) = 43$

$$\therefore (n((A \cup B)^c) \text{의 최댓값}) = M = 75 - 43 = 32$$

따라서 $M - m = 32 - 8 = 24$ 이다.