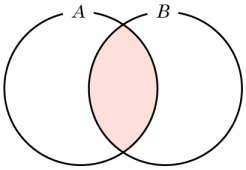
단원 종합 평가

1. 두 집합 $A = \{x|x\text{는 } 5 \text{ 의 배수}\}, B = \{x|x\text{는 } 75 \text{ 의 약수}\}$ 에 대하여 다음 벤 다이어그램으로 나타낼 때, 색칠한 부분에 해당하는 원소가 아닌 것은?

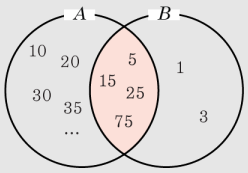


[배점 3, 중하]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 25 ⑤ 75

해설

$A = \{x|x\text{는 } 5 \text{ 의 배수}\} = \{5, 10, 15, 20, \cdots\}$, $B = \{x|x\text{는 } 75 \text{ 의 약수}\} = \{1, 3, 5, 15, 25, 75\}$ 이므로 두 집합 A, B 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 색칠한 부분에 해당하는 원소는 5,15,25,75 이다.

2. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 보기 중에서 옳은 문제의 번호를 모두 찾아 다음 그림판에서 색칠하면 태봉이가 제일 좋아하는 숫자가 나타난다. 그 수는 무엇인지 구하여라.

4	6	3
5	1	2
6	4	2
4	5	1
6	3	4

보기

㉠ $A \cup A^c = \varnothing$

㉡ $A \cap A^c = \varnothing$

㉢ $(A^c)^c = A$

㉣ $U - A = A^c$

㉤ $A - B = A \cup B^c$

㉥ $B - A = B \cap A^c$

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

㉠ $A^c = U$

㉤ $A - B = A \cap B^c$

옳은 것은 ㉡, ㉢, ㉣, ㉥으로 그림판에 색칠하면 다음 그림과 같다.

4	6	3
5	1	2
6	4	2
4	5	1
6	3	4

따라서 태봉이가 제일 좋아하는 숫자는 2이다.

3. 전체집합 U 와 두 부분집합 A, B에 대하여 $U = A \cup B$, $A = \{x \mid x$는 40의 약수$\}$, $B = \{x \mid x$는 25의 약수$\}$일 때, $(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B)$ 의 원소의 개수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2 개

해설

$A = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$
$B = \{1, 5, 25\}$
$A \cap B = \{1, 5\}$

4. 다음 중 옳은 것은? [배점 4, 중중]

① $n(\varnothing) = n(\{0\})$

② $n(\{1, 2, 4\}) - n(\{1, 4\}) = 2$

③ $n(\{4\}) = 4$

④ $n(\{x|x$는 40 이하의 짝수$\}) = 40$

⑤ $n(\{x|x$는 $2 < x < 4$인 홀수$\}) = 1$

해설

①$n(\varnothing) = 0,\ n(\{0\}) = 1$
②$n(\{1,\ 2,\ 4\}) - n(\{1,\ 4\}) = 3 - 2 = 1$
③$n(\{4\}) = 1$
④$n(\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 40\}) = 20$
⑤$n(\{3\}) = 1$

5. 집합 $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ 의 부분집합의 개수가 32 일 때, 자연수 n 의 값은? [배점 4, 중중]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$2^n = 32 \ \therefore n = 5$

6. 40명의 학생 중 수학을 좋아하는 학생이 24 명, 영어를 좋아하는 학생이 18 명, 수학과 영어를 모두 좋아하는 학생이 9 명일 때, 수학과 영어를 모두 싫어하는 학생 수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 7 명

해설

수학을 좋아하는 학생을 집합 A 라 하고, 영어를 좋아하는 학생을 집합 B 라고 하자.
수학과 영어를 좋아하는 학생, 즉 $A \cap B = 9$ 이다.
수학과 영어를 모두 싫어하는 학생은 합집합을 제외한 나머지 인원이다.
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$x = 24 + 18 - 9$
$x = 33$
$n(A \cup B) = 33$ 이므로 수학과 영어을 모두 싫어하는 학생은 $40 - 33 = 7$(명)이다.

7. 집합 $A_a = \{x \mid x$는 a의 배수$\}$, 집합 $B_b = \{x \mid x$는 b의 약수$\}$ 라고 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? [배점 5, 중상]

① $A_2 \subset A_4$ ② $B_2 \subset B_4$

③ $A_4 = B_4$ ④ $n(B_{15}) = 5$

⑤ $A_8 \subset A_4 \subset A_2$

해설

$A_2 = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12, \cdots\}$
$A_4 = \{4,\ 8,\ 12,\ 16, \cdots\}$
$A_8 = \{8,\ 16,\ 24, \cdots\}$
$B_2 = \{1,\ 2\}$
$B_4 = \{1,\ 2,\ 4\}$
$B_{15} = \{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$
① $A_4 \subset A_2$ ③ $A_4 \neq B_4$ ④ $n(B_{15}) = 4$

8. 집합 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, n 을 모두 포함하는 부분집합의 개수가 32 개일 때, n 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

집합 A 의 원소의 개수를 a 개라 하면 원소 1, n을 모두 포함하는 부분집합의 개수는 2^{a-2} 개이다.
$2^{a-2} = 32 = 2^5$
$a - 2 = 5$ 이므로 $a = 7$
따라서 집합 A 의 원소의 개수가 7 개이므로 n 의 값은 13 이다.

9. 자연수를 원소로 하는 두 집합 $A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6\}$, $B = \{a_k + b | a_k \in A\}$ 가 있다. $A \cap B = \{4,\ 7,\ 9\}$ 이고, 집합 A 의 원소의 합이 32 , $A \cup B$ 의 원소의 합이 62 일 때, 집합 B 의 원소 중 가장 큰 수와 작은 수의 차를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$A \cap B$ 의 원소의 합에서 집합 A 의 원소의 합을 빼고,
$A \cup B$ 의 원소의 합을 더해 주면
집합 B 의 원소의 합이 되므로, 집합 B 의 원소의 합은 50 이다.
집합 A 의 원소의 합이
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 32$ 이고,
$B = \{a_1+b,\ a_2+b,\ a_3+b,\ a_4+b,\ a_5+b,\ a_6+b\}$ 이므로
집합 B 의 원소의 합은
$a_1+b+a_2+b+a_3+b+a_4+b+a_5+b+a_6+b = 32 + 6b$
$32 + 6b = 50$ 이므로 $b = 3$ 이 된다.
교집합의 원소인 $4, 7, 9$ 는 집합 A 와 B 의 원소이므로 각각 3 을 더한 7 , 10 , 12 도 집합 B 의 원소가 된다.
또 집합 B 의 원소의 합이 50 이므로 4 , 7 , 9 , 10 , 12 와 8 이 된다.
$\therefore B = \{4,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12\}$

10. 다음 두 조건을 만족하는 집합 A 의 부분집합의 개수는?

$A \cap \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{2,\ 5\}$ $A \cup \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

[배점 5, 중상]

① 6개 ② 7개 ③ 8개

④ 9개 ⑤ 10개

해설

$A \cap \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{2,\ 5\}$ 에서 집합 A는 원소 2, 5를 포함하고, 원소 3, 4는 포함하지 않는다.

$A \cup \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에서 집합 A는 원소 1을 포함한다.

$\therefore\ A = \{1,\ 3,\ 4\}$

따라서 집합 A의 부분집합의 개수는 $2^3 = 8$ (개) 이다.

11. 진수네 반에서 동생이 있는 학생은 모두 25 명이다. 이 중에서 남동생이 있는 학생이 18 명, 여동생이 있는 학생이 15 명이었다. 남동생과 여동생이 모두 있는 학생은 몇 명인지 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8 명

해설

남동생과 여동생이 있는 집합을 각각 A, B 라 하면

$n(A) = 18,\ n(B) = 15,\ n(A \cup B) = 25$

$n(A \cap B) = 18 + 15 - 25 = 8$

12. 집합 $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중, 두 번째로 작은 원소가 5 인 부분집합의 개수를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 개

해설

$\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중, 두 번째로 작은 원소가 5 인 부분집합을 찾으려면,

5 는 반드시 포함되고 1, 2, 3 중에 하나만 포함되어야 한다.

(1) 1 과 5 는 포함되고, 2, 3 은 포함되지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-2} = 4$ (개)

(2) 2 와 5 는 포함되고, 1, 3 은 포함되지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-2} = 4$ (개)

(3) 3 과 5 는 포함되고, 1, 2 는 포함되지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-2} = 4$ (개)

따라서 $4 + 4 + 4 = 12$ (개)

13. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ 에 대하여 $B \cap X = B$, $(A - B) \cap X = \{1, 3\}$ 을 만족하는 U 의 부분집합 X 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2 개

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$A = \{1, 2, 3, 4\}$,

$B = \{4, 5, 6\}$ 이고,

$B \cap X = B \Rightarrow B \subset X$,

$(A - B) \cap X = \{1, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \cap X = \{1, 3\}$ 이므로

X 는 원소 1, 3, 4, 5, 6 을 반드시 포함하는 집합 U 의 부분집합이다.

따라서 집합 X 의 개수는 $2^{6-5} = 2$ (개)

14. 집합 S 의 부분집합 A, B 가 있다. $n(A \cap B) = 0$, $A^c = \{a, c, e\}$, $S - B = \{b, c, d, e, f\}$ 일 때, $n(A \cup B)$ 를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$A^c = \{a, c, e\}$, $S - B = B^c = \{b, c, d, e, f\}$,
$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{c, e\}$,
$n(A \cap B) = 0$ 이므로
$A^c - (A \cup B)^c = B = \{a\}$,
$B^c - (A \cup B)^c = A = \{b, d, f\}$,
따라서 $A \cup B = \{a, b, d, f\}$,
$\therefore n(A \cup B) = 4$

15. 두 집합 $A = \{3, 2a - 5, 2a + 1\}$, $B = \{a - 2, a, a + 2\}$ 에 대하여 $A \cap B^c = \{7\}$ 일 때, a 를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$A = \{3, 2a - 5, 2a + 1\}$, $B = \{a - 2, a, a + 2\}$ 이고
$A \cap B^c = A - B = \{7\}$ 이므로 집합 A 에는 원소 7 이 반드시 있다.
(1) $2a - 5 = 7$ 일 때, $a = 6$ 이고
$A = \{3, 7, 13\}$, $B = \{4, 6, 8\}$ 이다.
이때 $A - B \neq 7$ 이므로 성립할 수 없다.
(2) $2a + 1 = 7$ 일 때, $a = 3$ 이고
$A = \{1, 3, 7\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ 이다.
이때 $A - B = \{7\}$ 이므로 성립된다.
$\therefore a = 3$