

실력 확인 문제

1. 360 을 소인수분해하였을 때, 각 소인수의 지수의 합을 구하여라. [배점 2, 하중]

▶ 답:

▶ 정답: 6

해설

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)360} \\ 2 \overline{)180} \\ 2 \overline{)90} \\ 3 \overline{)45} \\ 3 \overline{)15} \\ \quad 5 \end{array}$$

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$\therefore 3 + 2 + 1 = 6$$

2. 두 자연수 a, b 의 최대공약수가 2×3^2 일 때, a, b 의 공약수의 개수를 구하여라. [배점 2, 하중]

▶ 답:

▶ 정답: 6 개

해설

a, b 의 공약수는 최대공약수 $2 \times 3^2 = 18$ 의 약수와 같으므로

$$\begin{aligned} & (a, b \text{의 공약수의 개수}) \\ &= (18 \text{의 약수의 개수}) \\ &= (2 \times 3^2 \text{의 약수의 개수}) \\ &= (1 + 1) \times (2 + 1) \\ &= 6(\text{개}) \end{aligned}$$

3. 다음 중에서 60 의 소인수 전체의 집합은?

[배점 2, 하중]

① {2, 3}

② {2, 3, 5}

③ {2³, 3, 5}

④ {1, 2, 3, 5}

⑤ {2, 1, 1}

해설

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)60} \\ 2 \overline{)30} \\ 3 \overline{)15} \\ \quad 5 \end{array}$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

따라서 60 의 소인수의 집합은 {2, 3, 5} 이다.

4. 세 수 9, 18, 27 의 공배수 중 500 이하의 자연수는 모두 몇 개인가? [배점 3, 하상]

① 3 개

② 5 개

③ 7 개

④ 9 개

⑤ 11 개

해설

9, 18, 27 의 공배수는 최소공배수 54 의 배수이므로 500 이하의 자연수는 $500 \div 54 = 9 \dots 14$ 이므로 9 개이다.

5. 세 수 12, 24, 36 의 공배수 중 900 이하의 자연수는 모두 몇 개인지 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: 12개

해설

12, 24, 36 의 공배수는 최소공배수 72 의 배수이므로 900 이하의 자연수는 $900 \div 72 = 12 \dots 36$ 이므로 12 개이다.

6. 다음 중 자연수를 소인수들만의 곱으로 나타낸 것 중 옳지 않은 것을 모두 골라라.

- ㉠ $72 = 2^3 \times 3^2$
- ㉡ $105 = 5 \times 21$
- ㉢ $147 = 3 \times 7^2$
- ㉣ $225 = 3^3 \times 5^3$
- ㉤ $240 = 2^3 \times 5 \times 6$

[배점 3, 하상]

해설

- ㉡ $105 = 3 \times 5 \times 7$
- ㉣ $225 = 3^2 \times 5^2$
- ㉤ $240 = 2^4 \times 3 \times 5$

7. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개) [배점 3, 중하]

- ㉠ $8015 = 8 \times 10^3 + 1 \times 10 + 5 \times 1$
- ㉡ $1101_{(2)} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 1$
- ㉢ 십진법은 0 부터 9 까지의 숫자를 사용한다.
- ㉣ $1001 = 1 \times 2^3 + 1 \times 1$
- ㉤ $11001_{(2)}$ 에서 밑줄 친 숫자 1 이 실제로 나타내는 값은 8 이다.

해설

- ㉣ $1001 = 1 \times 10^3 + 1 \times 1$
- ㉤ $11011_{(2)}$ 에서 밑줄 친 숫자 1 은 2^4 의 자리이므로 $1 \times 2^4 = 16$ 을 나타낸다.

8. 아래와 같이 이진법으로 나타낸 두 수 A, B 의 곱을 구하여라.

$$A = 101_{(2)}, \quad B = 1011_{(2)}$$

[배점 3, 중하]

- ㉠ 45 ㉡ 50 ㉢ 55 ㉣ 60 ㉤ 65

해설

$$A = 101_{(2)} = 1 \times 2^2 + 1 \times 1 = 4 + 1 = 5$$

$$B = 1011_{(2)} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 8 + 2 + 1 = 11$$

$$\therefore AB = 5 \times 11 = 55$$

9. 사탕 75 개, 초콜릿 102 개, 풍선껌 153 개를 수학 반 학생들에게 똑같이 나누어 주었더니 사탕이 3 개, 초콜릿이 6 개, 풍선껌이 9 개가 남았다. 가능한 수학 반 학생 수를 모두 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 12명

▷ 정답: 24명

해설

75 보다 3 작은 수, 102 보다 6 작은 수, 153 보다 9 작은 수는 어떤 수로 나누어 떨어진다. 그러므로 72, 96, 144 의 공약수 중 가장 큰 나머지만인 9 보다 큰 수를 구한다.

$$\begin{array}{r} 2) 72 \quad 96 \quad 144 \\ 2) 36 \quad 48 \quad 72 \\ 2) 18 \quad 24 \quad 36 \\ 3) 9 \quad 12 \quad 18 \\ \quad 3 \quad 4 \quad 6 \end{array}$$

∴ 최대공약수 : $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

최대공약수인 24 의 약수 중 9보다 큰 수는 12 와 24 이다. 따라서 12 명 또는 24 명이다.

10. 세 자연수 72, A, 84 의 최대공약수가 6 일 때, 다음 중 A 의 값이 될 수 없는 것은? [배점 3, 중하]

- ① 6 ② 18 ③ 24 ④ 30 ⑤ 42

해설

$$\begin{array}{r} 6) 72 \quad A \quad 84 \\ \quad 12 \quad a \quad 14 \end{array}$$

$A = 6 \times a$ (단, a 는 1 또는 소수이다.)

- ① $6 = 6 \times 1$ (○)
 ② $18 = 6 \times 3$ (○)
 ③ $24 = 6 \times 4$ (×)
 ④ $30 = 6 \times 5$ (○)
 ⑤ $42 = 6 \times 7$ (○)

11. 다음 식을 만족하는 a, b, c 의 곱은?

$$1 \times 2 \times 4 \times 5 \times 10 \times 20 = 2^a \times 3^b \times 5^c$$

[배점 3, 중하]

- ① 0 ② 1 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$$1 \times 2 \times (2 \times 2) \times 5 \times (2 \times 5) \times (2 \times 2 \times 5) = 2^6 \times 3^0 \times 5^3$$

∴ $a = 6, b = 0, c = 3$
 ∴ $6 \times 0 \times 3 = 0$

12. 이진법으로 나타낸 수 $1a11_{(2)}$ 과 $11b00_{(2)}$ 이 3의 배수가 되기 위한 a, b 의 값을 각각 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: $a = 1, b = 0$

해설

$$1a11_{(2)} = 1 \times 2^3 + a \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 11 + 4 \times a$$

a 의 값이 될 수 있는 수는 0 또는 1 이므로 3의 배수가 되려면 $a = 1$ 이어야 한다.

$$11b00_{(2)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + b \times 2^2 = 24 + 4 \times b$$

b 의 값이 될 수 있는 수는 0 또는 1 이므로 3의 배수가 되려면 $b = 0$ 이어야 한다.

13. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 1010_{(2)} < x < 111100_{(2)} \text{ 인 4의 배수}\}$ 일 때, $n(A)$ 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$$1010_{(2)} = 10, 111100_{(2)} = 60$$

$$A = \{x \mid x \text{는 } 1010_{(2)} < x < 111100_{(2)} \text{ 인 4의 배수}\} = \{12, 16, 20, \dots, 56\}$$

$$\therefore n(A) = 12$$

14. 두 자연수 $2^3 \times 3^3 \times 5$ 와 $a^b \times c^2$ 의 최대공약수가 $3^3 \times 5$, 최소공배수가 $2^3 \times 3^4 \times 5^2$ 일 때, a, b, c 의 값을 차례로 구하면? (단, $a < b < c$ 인 소수)

[배점 4, 중중]

① 2, 3, 4 ② 2, 3, 5 ③ 3, 4, 5

④ 3, 4, 7 ⑤ 4, 5, 7

해설

두 자연수 $2^3 \times 3^3 \times 5$, $a^b \times c^2$ 에 대하여 최대공약수가 $3^3 \times 5$ 이고 최소공배수가 $2^3 \times 3^4 \times 5^2$ 이므로

$$\therefore a = 3, b = 4, c = 5$$

15. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 2^5 \times 7^3 \text{의 약수 중에서 } a^2 \text{이 되는 수}\}$ 일 때, 집합 A 의 원소의 개수는? (단, a 는 자연수)

[배점 4, 중중]

① 2개 ② 4개 ③ 6개

④ 8개 ⑤ 10개

해설

$2^5 \times 7^3$ 의 약수 중 (자연수)²이 되는 수는

$$1, 2^2, (2^2)^2, 7^2, (2 \times 7)^2, (2^2 \times 7)^2$$

$$\therefore n(A) = 6$$

16. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 168 \text{의 소인수}\}$ 의 부분집합의 개수를 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 8개

해설

168을 소인수분해하면 $168 = 2^3 \times 3 \times 7$ 이다.

$A = \{2, 3, 7\}$ 의 부분집합의 개수는

$$2^3 = 8 \text{ (개)}$$

17. 어떤 분수를 두 분수 $\frac{21}{8}$ 과 $\frac{35}{12}$ 에 각각 곱하였더니 그 결과가 모두 자연수가 되었다. 곱한 수 중에서 가장 작은 분수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{24}{7}$

해설

곱하는 분수를 $\frac{b}{a}$ 라고 하자

$$\frac{21}{8} \times \frac{b}{a} = (\text{자연수}) \begin{cases} b \text{는 } 8 \text{의 배수} \\ a \text{는 } 21 \text{의 약수} \end{cases}$$

$$\frac{35}{12} \times \frac{b}{a} = (\text{자연수}) \begin{cases} b \text{는 } 12 \text{의 배수} \\ a \text{는 } 35 \text{의 약수} \end{cases}$$

즉, $\frac{b}{a} = \frac{(8, 12 \text{의 공배수})}{(21, 35 \text{의 공약수})} \dots \textcircled{1}$ 이다.

$\textcircled{1}$ 을 만족하는 가장 작은 분수는 $\frac{b}{a} = \frac{(8, 12 \text{의 최소공배수})}{(21, 35 \text{의 최대공약수})} \dots \textcircled{2}$ 이다.

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{24}{7}$$

18. 네 자리의 이진법으로 나타낸 수 중에서 10 보다 큰 수는 몇 개인지 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 5개

해설

가장 큰 네 자리의 이진법 수는 $1111_{(2)}$ 이다.

$1111_{(2)} = 15$ 이므로 11, 12, 13, 14, 15 로 5 개 이다.

19. 두 자연수 A, B 에서 $A \times B$ 의 값이 1440 이고, 최대 공약수가 12 일 때, 차가 가장 작은 두 자연수의 합은? [배점 5, 중상]

- ① 11 ② 36 ③ 72

- ④ 84 ⑤ 108

해설

최소공배수를 L 이라 하면 $1440 = 12 \times L$ 이므로

$$L = 120$$

$$\overset{12)}{a} \frac{B}{b} 12 \times a \times b = 120$$

$a \times b = 10$ (단, a, b 는 서로소)

$A = 12 \times a, B = 12 \times b$ 이고 $A > B$ 라 하면

$a = 10, b = 1$ 또는 $a = 5, b = 2$

(i) $a = 10, b = 1$ 일 때

$$A - B = 10 \times 12 - 1 \times 12 = 108$$

(ii) $a = 5, b = 2$ 일 때

$$A - B = 5 \times 12 - 2 \times 12 = 36$$

따라서, 차가 가장 작은 두 자연수는 60, 24 이다.

20. 세 수 $2 \times 7^4, 2^a \times 3 \times 7^3, 2 \times b^c \times 7^d$ 의 최대공약수가 2×7^3 이고, 최소공배수가 $2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7^5$ 일 때, $a \times b - c \times d$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

최대공약수가 2×7^3 ,

최소공배수가 $2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7^5$ 이므로

$$a = 3, b = 5, c = 2, d = 5$$

$$\therefore a \times b - c \times d = 3 \times 5 - 2 \times 5 = 5$$