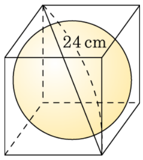
단원테스트 1차

1. 대각선의 길이가 $24\,\text{cm}$ 인 정육면체 안에 꼭 맞는 구가 있다. 이 구의 부피를 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : $256\sqrt{3}\pi\,\text{cm}^3$

해설

정육면체의 한 모서리의 길이를 x 라 하면

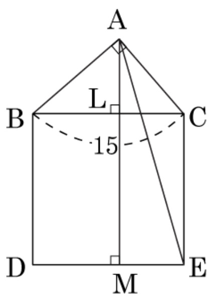
$\sqrt{3}x = 24$

$\therefore x = 8\sqrt{3}(\text{cm})$

구의 반지름의 길이 : $8\sqrt{3} \div 2 = 4\sqrt{3}(\text{cm})$

따라서 구의 부피는 $\frac{4}{3}\pi \times (4\sqrt{3})^3 = 256\sqrt{3}\pi(\text{cm}^3)$ 이다.

2. 다음 그림은 $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 에서 $\overline{BC}$ 를 한 변으로 하는 정사각형 BDEC 를 그린 것이다. $\overline{BC} = 15$, $\triangle AEC = 50$ 일 때, $\overline{AB}$ 의 길이를 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : $5\sqrt{5}$

해설

$\triangle LEC = \triangle AEC = 50$ 이므로 $\square LMEC = 100$ 이다. 또, $\square BDML = 15^2 - 100 = 125$ 이다.

따라서 $\overline{AB}^2 = 125$ 이므로 $\overline{AB} = 5\sqrt{5}$ 이다.

3. 두점 $A(1,\ 2)$ $B(-5,\ 0)$ 에서 같은 거리에 있는 y 축 위의 점 P 의 좌표를 구하여라. [배점 5, 중상]

① $(0, -5)$ ② $(0, -4)$ ③ $(0, -3)$

④ $(0, -2)$ ⑤ $(0, -1)$

해설

점 P 의 좌표를 $(0,\ p)$ 라 하면

$\overline{BP} = \sqrt{25 + p^2}$

$\overline{AP} = \sqrt{1 + (p-2)^2}$

$\overline{BP} = \overline{AP}$ 이므로

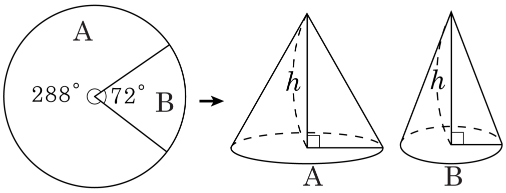
$\sqrt{25 + p^2} = \sqrt{1 + (p-2)^2}$

$25 + p^2 = 1 + (p-2)^2$

$-4p = 20$

$p = -5 \therefore\ P(0, -5)$

4. 반지름의 길이가 10 인 원을 다음 그림과 같이 중심각이 $288°$, $72°$ 가 되도록 잘라내어 2 개의 고깔을 만들었다. 두 고깔 A, B 의 부피를 각각 x, y 라 할 때, $\frac{x}{y}$ 의 값은?



[배점 5, 중상]

① $\frac{\sqrt{6}}{24}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{12}$ ③ $2\sqrt{6}$
④ $4\sqrt{6}$ ⑤ $6\sqrt{6}$

해설

$i)$ 호의 길이와 밑면의 둘레

A : $20\pi \times \frac{288°}{360°} = 16\pi$

$\therefore r_A = 8$

B : $20\pi \times \frac{72°}{360°} = 4\pi$

$\therefore r_B = 2$

$ii)$ 원뿔의 높이

A : 모선의 길이는 10 , 밑면의 반지름의 길이는 8

$h_A = \sqrt{100-64} = \sqrt{36} = 6$

B : 선의 길이는 10 , 밑면의 반지름의 길이는 2

$h_B = \sqrt{100-4} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$

$iii)$ 원뿔의 부피

A : 밑면의 반지름의 길이는 8 , 높이는 6

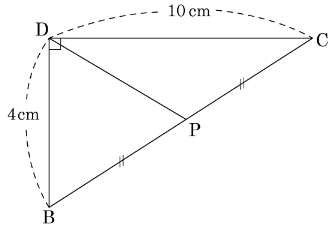
$V_A = \frac{1}{3} \times 8 \times 8 \times \pi \times 6 = x$

B : 밑면의 반지름의 길이는 2 , 높이는 $4\sqrt{6}$

$V_B = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \pi \times 4\sqrt{6} = y$

$\therefore \frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{3} \times 8 \times 8 \times \pi \times 6}{\frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \pi \times 4\sqrt{6}} = \frac{24}{\sqrt{6}} = \frac{24\sqrt{6}}{6} =$
$4\sqrt{6}$

5. 직각삼각형 BCD 에서 $\overline{BD} = 4\text{cm}$, $\overline{CD} = 10\text{cm}$ 이고, 점 P 가 $\overline{BC}$ 를 이등분할 때, $\overline{PD}$ 의 길이는?



[배점 5, 중상]

① $\sqrt{29}$ cm ② $\sqrt{30}$ cm ③ $\sqrt{31}$ cm
④ $4\sqrt{2}$ cm ⑤ $\sqrt{33}$ cm

해설

피타고라스 정리에 따라서

$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = 4^2 + 10^2 = 116$

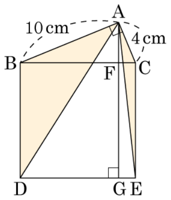
$\overline{BC} = 2\sqrt{29}$ cm

점 P 가 $\overline{BC}$ 를 이등분하므로 $\overline{BP} = \overline{CP} = \sqrt{29}$ cm

그런데 직각삼각형의 빗변의 중점은 직각삼각형의 외심이므로

$\overline{DP} = \overline{BP} = \overline{CP}$ 이므로 $\overline{DP} = \sqrt{29}$ cm 이다.

6. 다음 그림과 같이 $\angle A = 90°$, $\overline{AB} = 10\text{cm}$, $\overline{AC} = 4\text{cm}$ 인 $\triangle ABC$ 가 있다. $\overline{BC}$ 를 한 변으로 하는 정사각형 BDEC 를 그렸을 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하면?



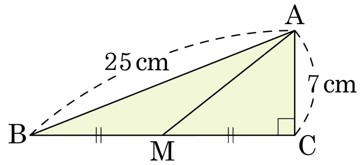
[배점 5, 상하]

① 56cm^2 ② 57cm^2 ③ 58cm^2
④ 59cm^2 ⑤ 60cm^2

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\overline{BC} = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116}(\text{cm})$
($\triangle ABD$의 넓이) = ($\triangle BDF$의 넓이)
($\triangle AEC$의 넓이) = ($\triangle FEC$의 넓이)
(색칠한 부분의 넓이) $= \triangle BDF + \triangle FEC = \frac{1}{2}(\square BDEC) = 58(\text{cm}^2)$

7. 다음 그림에서 $\angle C = 90°$, $\overline{BM} = \overline{CM}$, $\overline{AB} = 25\text{cm}$, $\overline{AC} = 7\text{cm}$ 이다. 이 때, $\overline{AM}$ 의 길이는 무엇인가?.



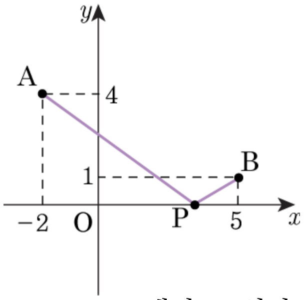
[배점 5, 상하]

① $\sqrt{190}\text{cm}$ ② $\sqrt{191}\text{cm}$ ③ $\sqrt{193}\text{cm}$
④ $\sqrt{194}\text{cm}$ ⑤ $\sqrt{199}\text{cm}$

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\overline{BC}^2 = 25^2 - 7^2 = 576$, $\overline{BC} = 24(\text{cm})$
$\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{MC}$, $\overline{MC} = 12(\text{cm})$
$\triangle AMC$ 에서 $\overline{AM}^2 = 7^2 + 12^2 = 193$, $\overline{AM} = \sqrt{193}(\text{cm})$

8. 다음 그림과 같은 좌표평면 위에 두 점 $A(-2,\ 4)$, $B(5,\ 1)$ 이 있다. x 축 위에 임의의 점 P 를 잡았을 때, $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값을 구하여라.

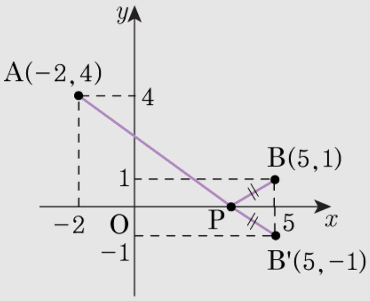


[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{74}$

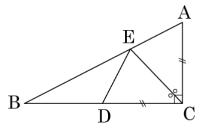
해설



$\overline{AP}+\overline{BP}$ 가 최소가 되는 점 P 는 점 B 와 x 축에 대하여 대칭인 점 $B'(5,\ -1)$ 을 잡을 때, $\overline{AB'}$ 와 x 축과의 교점이므로 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값은 $\overline{AB'}$ 의 길이이다.

$\therefore\ \overline{AB'}=\sqrt{(5+2)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{74}$

9. 다음 그림과 같이 $\angle ACB=90°$ 인 직각삼각형 ABC 에서 $\overline{AB}=13cm$, $\overline{AC}=\overline{CD}=5\mathrm{cm}$, $\angle ACE=\angle ECD$ 일 때, $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{DE}}$ 의 값을 구하여라.



[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2.4

해설

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=13^2-5^2=144=12^2$

$\therefore \overline{BC}=12\,(cm)$

$\therefore \overline{BD}=12-5=7\,(\mathrm{cm})$

또한 $\triangle ACE\equiv\triangle DCE$ (SAS 합동)

$\therefore \overline{DE}=\overline{AE}$

각의 이등분선의 성질에 의해

$\overline{AC}\ :\ \overline{BC}=\overline{AE}\ :\ \overline{BE}$

$\dfrac{\overline{BE}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{12}{5}=2.4$

10. $a>b$ 이고, $x=a+b,\ y=a-b,\ z=2\sqrt{ab}$ 일 때, x,y,z 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인가? [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : x 가 빗변인 직각삼각형

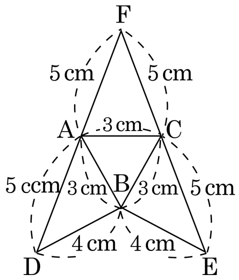
해설

$x^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$y^2+z^2=(a-b)^2+4ab=a^2+2ab+b^2$

$\therefore\ x^2=y^2+z^2$ 이므로 x 가 빗변인 직각삼각형이다.

11. 다음 그림과 같은 전개도를 가지는 삼각뿔의 부피를 구하여라.



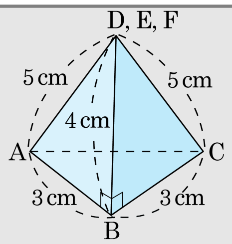
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

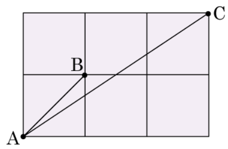
해설

$3^2 + 4^2 = 5^2$ 이므로 $\triangle ADB$ 와 $\triangle BEC$ 는 $\angle ABD = \angle CBE = 90°$ 인 직각삼각형이다.



$$(\text{삼각뿔의 부피}) = \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times \overline{DB}$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3^2 \times 4 = 6$$

12. 다음과 같이 정사각형이 모여 직사각형 모양을 낸 땅이 있다. A 에서 B 로 직선거리로 가는데 5m 라고 할 때, A 에서 C 로 가는 직선거리를 구하여라.



[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}\sqrt{26}$ m

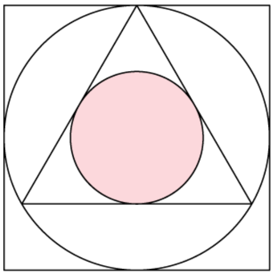
해설

$\overline{AB}$ 의 길이가 5m 이고 정사각형이므로 작은 정사각형의 한변의 길이는 $\frac{5}{2}\sqrt{2}$m 가 된다.

$\overline{AC}$ 가 대각선인 직각삼각형의 가로는 $3 \times \frac{5}{2}\sqrt{2} = \frac{15}{2}\sqrt{2}(\mathrm{m})$, 세로는 $2 \times \frac{5}{2}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}(\mathrm{m})$

$\overline{AC} = \sqrt{\frac{225}{4} \times 2 + 25 \times 2} = \sqrt{\frac{225}{2} + 50} = \sqrt{\frac{325}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{26}(\mathrm{m})$

13. 다음 그림과 같이 정사각형에 내접한 원에 정삼각형이 내접하고 있고, 정삼각형 안에 원이 또 내접하고 있다. 정사각형의 넓이가 18 일 때, 작은 원의 넓이를 구하여라.

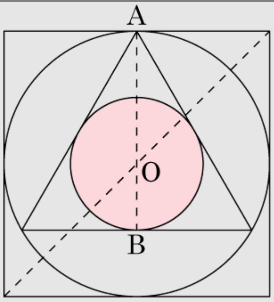


[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{8}\pi$

해설



원의 지름의 길이는 정사각형의 한 변의 길이이므로

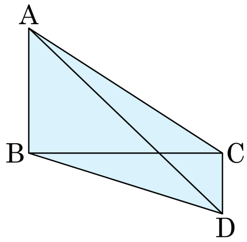
(큰 원의 지름의 길이) $= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

이 때, 점 O 는 정삼각형의 무게중심이므로

$\overline{OB} = \frac{1}{2}\overline{AO} = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

따라서 작은 원의 넓이는 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 \pi = \frac{9}{8}\pi$ 이다.

14. 다음 그림과 같이 $\angle ABC = \angle BCD = 90°$, $\overline{BC} = 5$ 이고, 삼각형 ABC 와 BCD 의 넓이가 각각 20, 15 일 때, 선분 AD 의 길이를 구하여라.



[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{221}$

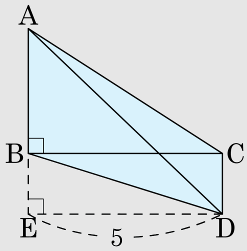
해설

$\triangle ABC = 20, \triangle BCD = 15$ 이고,

$\overline{BC} = 5$ 이므로 $\overline{AB} = 8$, $\overline{CD} = 6$

$\overline{AE} = 8 + 6 = 14$

$\therefore \overline{AD} = \sqrt{14^2 + 5^2} = \sqrt{221}$



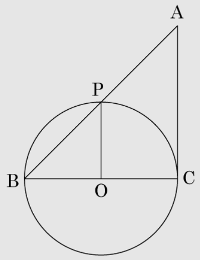
15. 한 변의 길이가 4 인 정사각형 ABCD 의 내부에 있는 한 점 P 가 $\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2 \leq 16$ 을 만족하면서 움직일 때, 점 P 가 움직이는 영역의 넓이를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2π

해설



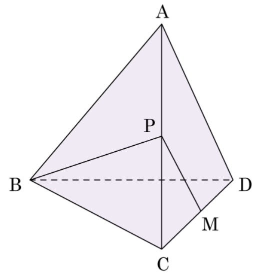
$\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2 \leq 16=\overline{\mathrm{BC}}^2$ 이므로

$\triangle\mathrm{PBC}$ 는 $\angle\mathrm{P} \geq 90°$ 인 삼각형이다.

따라서 P 가 움직이는 영역의 넓이는

(반원 O 의 넓이)$=\frac{1}{2}\times 2^2\times\pi=2\pi$ 이다.

16. 다음과 같이 한 모서리의 길이가 12 인 정사면체의 겉면을 따라 점 B 에서 모서리 CD 의 중점 M 까지 가는 최소 거리를 구하여라.



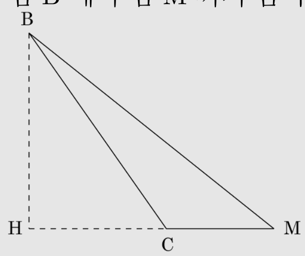
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $6\sqrt{7}$

해설

점 B 에서 점 M 까지 움직인 거리의 전개도에서

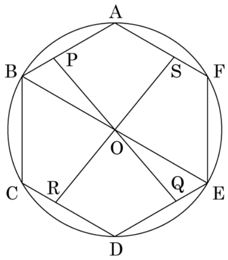


$\triangle\mathrm{BCM}$ 의 점 B 에서 $\overline{\mathrm{CM}}$ 의 연장선에 내린 수선의 발을 H 라 하면,

$\triangle\mathrm{BHC}$ 에서 $\angle\mathrm{BCH}=60°$ 이므로 $\overline{\mathrm{CH}}=6$, $\overline{\mathrm{BH}}=6\sqrt{3}$

따라서 $\triangle\mathrm{BHM}$ 에서 $\overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{(6\sqrt{3})^2+12^2}=\sqrt{252}=6\sqrt{7}$ 이다.

17. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 12 인 원 O 에 정육각형 ABCDEF 가 내접하고 있다. 변 AB 위의 한 점을 P , 선분 OP 의 연장선과 변 DE 의 교점을 Q 라 하고, 변 CD 위의 한 점을 R , 선분 OR 의 연장선과 변 AF 와의 교점을 S 라 할 때, □ORDQ + □OEFS + △OBP 의 값을 구하여라.

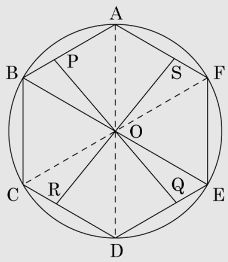


[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $108\sqrt{3}$

해설



$\triangle\mathrm{OPB} \equiv \triangle\mathrm{OQE}$

$\triangle\mathrm{OCR} \equiv \triangle\mathrm{OFS}$

구하는 부분의 넓이를 S 라 하면

$S = \triangle\mathrm{OAF} + \triangle\mathrm{OAB} + \triangle\mathrm{OBC}$

$= ($한 변의 길이가 12인 정삼각형의 넓이$) \times 3$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 12^2 \times 3 = 108\sqrt{3}$