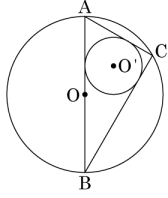


단원 종합 평가

1. 다음 그림에서 $\triangle ABC$ 의 외접원의 지름의 길이는 17cm 이고 내접원의 지름의 길이는 6cm 이다. $\overline{AB}$ 가 외접원의 지름일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라. (단, $\angle C$ 는 직각이다.)

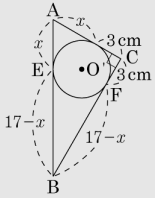


[배점 3, 중하]

▶ 답 :

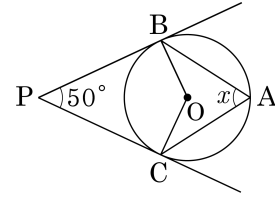
▶ 정답 : 60 cm^2

해설



$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \frac{1}{2} \times 3 \times (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times (17 \times 2 + 3 \times 2) \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 40 \\ &= 60(\text{cm}^2)\end{aligned}$$

2. 다음 그림에서 $\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ 가 원 O의 접선일 때, $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



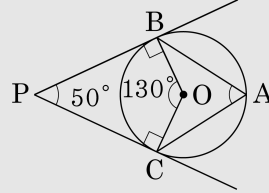
[배점 3, 중하]

▶ 답 :

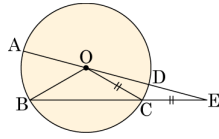
▶ 정답 : 65°

해설

$$\angle x = 130^\circ \times \frac{1}{2} = 65^\circ$$



3. 다음 그림에서 원 O의 지름 AD의 연장선과 현 BC가 만나는 점을 E라 하고 $\overline{OC} = \overline{CE}$, $\angle E = 10^\circ$, $\widehat{CD} = 15\text{cm}$ 일 때, $\widehat{AB}$ 의 길이를 구하여라.



[배점 3, 중하]

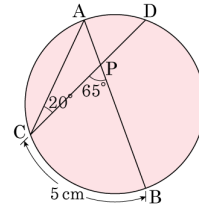
▶ 답 :

▶ 정답 : 45 cm

해설

$$\begin{aligned}\angle E &= \angle COE = 10^\circ \\ \angle OCB &= \angle OBC = 20^\circ \\ \angle BOC &= 140^\circ \\ \angle AOB &= 180^\circ - (140^\circ + 10^\circ) = 30^\circ \\ \widehat{AB} : \widehat{CD} &= \angle AOB : \angle COD \\ \widehat{AB} : 15 &= 30^\circ : 10^\circ \\ \therefore \widehat{AB} &= 45\end{aligned}$$

4. 다음 그림에서 $\widehat{BC} = 5\text{cm}$ 이고, $\angle ACD = 20^\circ$, $\angle BPC = 65^\circ$ 일 때, $\widehat{AD}$ 의 길이는?



[배점 4, 중중]

- ① 10cm ② 12cm ③ $\frac{14}{3}\text{cm}$
④ $\frac{16}{5}\text{cm}$ ⑤ $\frac{20}{9}\text{cm}$

해설

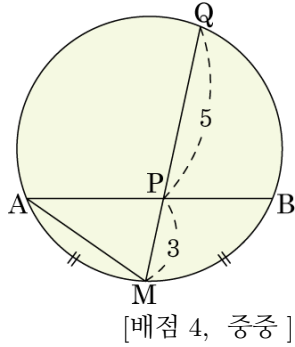
$\triangle ACP$ 에서 $\angle CAB = 45^\circ$ 이므로

$$\angle CAB : \angle ACD = \widehat{BC} : \widehat{AD}$$

$$45^\circ : 20^\circ = 5 : \widehat{AD}$$

$$\therefore \widehat{AD} = \frac{20}{9}\text{cm}$$

5. 다음 그림과 같이 $\widehat{AB}$ 의 중점을 M 이라 하고 M에서 그은 직선이 $\overline{AB}$, 원과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{MP} = 3$, $\overline{PQ} = 5$ 이면 $\overline{AM}$ 의 길이는?

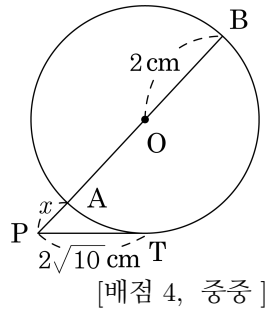


- ① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{15}$ ③ 5
 ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

$$\overline{AM}^2 = 3(3+5) \quad \therefore \overline{AM} = 2\sqrt{6}$$

6. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 는 반지름이 3cm인 원 O의 접선일 때, x 의 값을 구하여라.



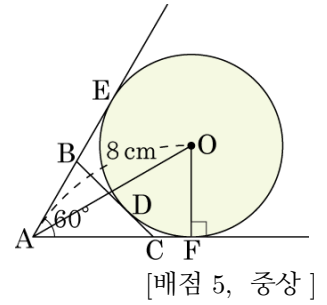
▶ 답 :

▶ 정답 : 4cm

해설

$$\begin{aligned} \overline{PT}^2 &= \overline{PA} \cdot \overline{PB} \\ (2\sqrt{10})^2 &= x(x+6) \\ x^2 + 6x - 40 &= 0 \\ (x-4)(x+10) &= 0 \\ x &= 4 \text{ 또는 } -10 \\ \therefore x &= 4 (\because x > 0) \end{aligned}$$

7. 다음 그림에서 $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ 는 원 O의 접선이다. $\overline{AO} = 8\text{cm}$ 이고 $\angle BAC = 60^\circ$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 둘레의 길이를 구하여라.



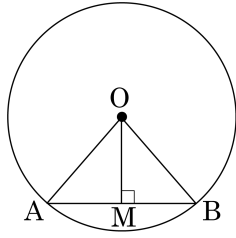
▶ 답 :

▶ 정답 : $8\sqrt{3}\text{cm}$

해설

$$\begin{aligned} \triangle OAF \text{ 에서 } \angle OAF &= 30^\circ \\ \overline{AO} : \overline{AF} &= 2 : \sqrt{3} \\ \therefore \overline{AF} &= 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}(\text{cm}) \\ \text{또한 } \overline{BE} &= \overline{BD}, \overline{DC} = \overline{CF} \\ \triangle ABC \text{의 둘레의 길이는} \\ \overline{AB} + \overline{AC} + (\overline{BD} + \overline{DC}) \\ &= (\overline{AB} + \overline{BE}) + (\overline{AC} + \overline{CF}) \\ &= 2\overline{AF} = 8\sqrt{3}(\text{cm}) \\ \therefore &8\sqrt{3}\text{cm} \end{aligned}$$

8. 다음은 원의 중심에서 현에 수선을 그었을 때, 그 현이 이등분됨을 증명한 것이다. () 안에 알맞은 것을 순서대로 나열하면?



[가정] $\overline{OM} \perp \overline{AB}$

[결론] $\overline{AM} = \overline{BM}$

[증명]

$\triangle OAM$ 과 $\triangle OBM$ 에서

$\overline{OA} = (\quad)$ ($\because$ 원의 반지름)

$\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$

$\overline{OM}$ 은 공통이므로 $\triangle OAM \equiv (\quad)$

$\therefore \overline{AM} = (\quad)$

따라서 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

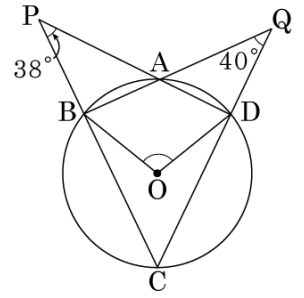
[배점 5, 중상]

- ① ① $\overline{OB}$ ② $\triangle OAB$ ③ $\overline{BM}$
 ② ① $\overline{OM}$ ② $\triangle OBM$ ③ $\overline{BM}$
 ③ ① $\overline{OB}$ ② $\triangle OBM$ ③ $\overline{AB}$
 ④ ① $\overline{OB}$ ② $\triangle OBM$ ③ $\overline{BM}$
 ⑤ ① $\overline{AB}$ ② $\triangle OBM$ ③ $\overline{BM}$

해설

$\triangle OAM$ 과 $\triangle OBM$ 에서 $\overline{OA} = \overline{OB}$ ($\because$ 원의 반지름), $\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$,
 $\overline{OM}$ 은 공통이므로 $\triangle OAM \equiv \triangle OBM$
 $\therefore \overline{AM} = \overline{BM}$

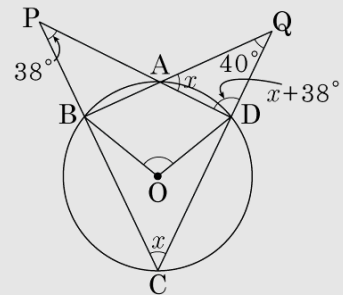
9. 다음 그림에서 $\square ABCD$ 는 원 O 에 내접하고 $\angle DPC = 38^\circ$, $\angle BQC = 40^\circ$ 일 때, $\angle BOD$ 의 크기는?



[배점 5, 중상]

- ① 78° ② 82° ③ 90°
 ④ 98° ⑤ 102°

해설



$\angle BCD = \angle x$ 라 하면 $\angle ADQ = \angle x + 38^\circ$,

$\angle DAQ = \angle BCD = x$ ($\because$ 한 외각과 그 내대각의 크기는 같다.)

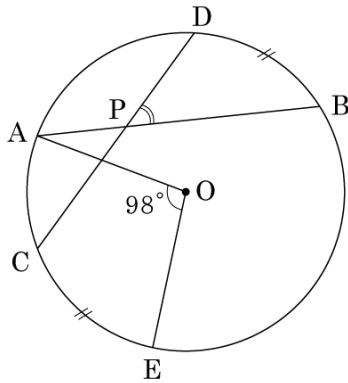
$\triangle ADQ$ 의 세 내각의 크기의 합은

$\angle x + (\angle x + 38^\circ) + 40^\circ = 180^\circ$

$\therefore \angle x = 51^\circ$ 이다.

따라서 $\angle BOD = 2\angle BCD = 2 \times 51^\circ = 102^\circ$

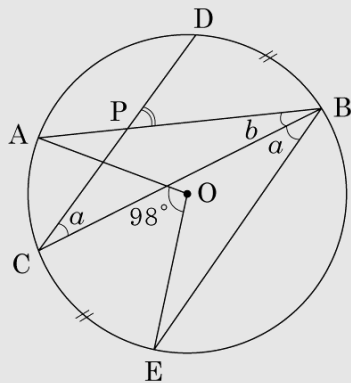
10. 다음 그림에서 $\widehat{BD} = \widehat{CE}$ 이고, $\angle AOE = 98^\circ$ 일 때, $\angle DPB$ 의 크기는?



[배점 5, 중상]

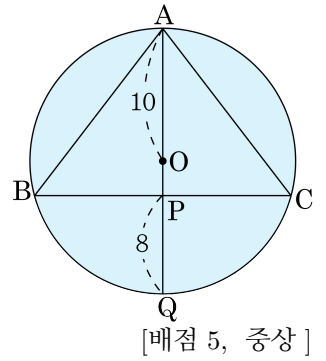
- ① 45° ② 46° ③ 47°
 ④ 48° ⑤ 49°

해설



$\angle CBE = a$, $\angle ABC = b$ 라고 하면,
 $a + b = \angle ABE = \frac{1}{2} \angle AOE = 49^\circ$
 $\angle CBE = \angle BCD$ 이므로
 $\triangle BCP$ 에서 $\angle BPD = a + b = 49^\circ$

11. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 10 인 원 O에 내접하는 이등변 삼각형 ABC 에 대하여 $\overline{PQ} = 8$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?

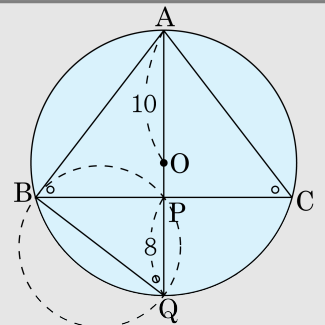


[배점 5, 중상]

- ① $36\sqrt{2}$ ② $42\sqrt{17}$ ③ $48\sqrt{6}$
 ④ 52 ⑤ $52\sqrt{3}$

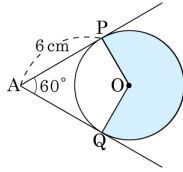
해설 그림과 같이

보조선 $\overline{BQ}$ 를
 연결하면
 $\angle ACB = \angle AQB = \angle ABP$



이 때, $\overline{AQ} = 20$ 이므로 $\overline{AP} = 12$
 $\therefore \overline{AB}^2 = \overline{AP} \times \overline{PQ} = 12 \times 20 = 240$
 $\therefore \overline{AB} = 4\sqrt{15}$
 선분 BC 는 $\overline{OP}$ 에 의해 수직이등분되므로 직각 삼각형 $\triangle ABP$ 에서
 $\overline{BP} = \sqrt{(4\sqrt{15})^2 - 12^2} = 4\sqrt{6} \quad \therefore \overline{BC} = 8\sqrt{6}$
 따라서, 구하는 넓이는
 $\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AP} = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{6} \times 12 = 48\sqrt{6}$ 이다.

12. 다음 그림에서 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ 는 원 O의 접선이고, 점 P, Q는 원 O의 접점이다. $\overline{AP} = 6\text{cm}$, $\angle PAQ = 60^\circ$ 일 때, 색칠한 부분의 부채꼴의 넓이를 구하여라.



[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $8\pi\text{cm}^2$

해설

$\angle APO = 90^\circ$ 이므로

$\angle POQ = 360^\circ - (60^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 120^\circ$

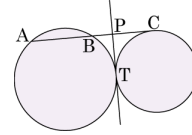
점 A, O를 연결하면 특수한 삼각형의 성질에 의하여

$$\overline{PO} = \overline{QO} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

따라서 색칠한 부채꼴의 중심각은 120° 이므로

$$\text{넓이는 } \pi \times (2\sqrt{3})^2 \times \frac{120}{360} = 8\pi(\text{cm}^2)$$

13. 다음 그림에서 점 T는 두 원이 외접하는 점점이고 점 C는 현 AB를 지나는 직선이 다른 원과 외접하는 점이다. $\overline{PB} = 1$, $\overline{PC} = 2$ 일 때, 현 AB의 길이를 구하여라.



[배점 5, 상하]

▶ 답 :

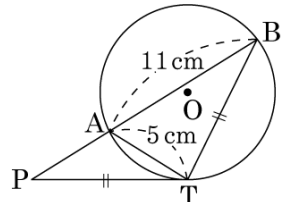
▷ 정답 : 3

해설

점 P에서 한 원에 그은 두 접선의 길이는 같으므로 $\overline{PC} = \overline{PT} = 2$

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB} \text{ 이므로 } 4 = 1 + \overline{AB} \quad \therefore \overline{AB} = 3$$

14. 다음 그림과 같이 원 O 밖의 한 점 P에서 원에 그은 접선의 접점을 T라 하고, 점 P에서 그은 할선의 교점을 A, B라 하자. $\overline{PT} = \overline{BT}$, $\overline{AB} = 11\text{cm}$, $\overline{AT} = 5\text{cm}$ 일 때, $\overline{PT}$ 의 길이를 구하여라.



[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $4\sqrt{5}\text{cm}$

해설

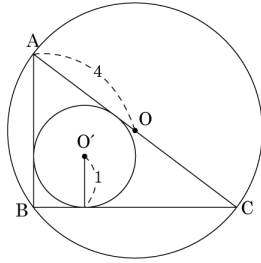
$\angle ATP = \angle PBT = \angle BPT$

$\triangle APT$ 가 이등변삼각형이므로 $\overline{PA} = 5$

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB} = 5 \times (5 + 11) = 80$$

$$\therefore \overline{PT} = 4\sqrt{5} (\because \overline{PT} > 0)$$

15. 다음 그림과 같이 $\overline{AC}$ 가 지름인 원 O 는 $\triangle ABC$ 의 외접원이고 원 O' 는 내접원이다. 원 O 와 원 O' 의 반지름의 길이가 각각 4, 1일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.

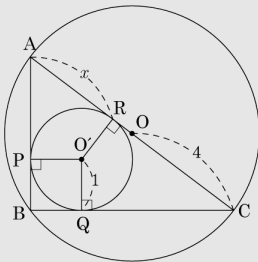


[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설



원 O' 과 $\triangle ABC$ 의 세 변 AB , BC , CA 의 접점을 각각 P , Q , R 이라 하고

$\overline{AP} = \overline{AR} = x$ 라 하면 $\overline{AB} = x + 1$, $\overline{BC} = 9 - x$ 이므로

$\triangle ABC$ 에서

$$8^2 = (x + 1)^2 + (9 - x)^2$$

$$2x^2 - 16x + 18 = 0$$

$$\therefore x = 4 - \sqrt{7} (\because 0 < x < 4)$$

$$\therefore \overline{AB} = 4 - \sqrt{7} + 1 = 5 - \sqrt{7}, \overline{BC} = 9 - (4 - \sqrt{7}) = 5 + \sqrt{7}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times (5 - \sqrt{7}) \times (5 + \sqrt{7}) = 9$$