

문제 풀이 과제

1. $\frac{28}{5}$ 과 $\frac{35}{8}$ 의 어느 것에 곱하여도 자연수가 되는 분수 중 가장 작은 수는? [배점 2, 하중]

① $\frac{32}{7}$ ② $\frac{36}{7}$ ③ $\frac{40}{7}$ ④ $\frac{41}{7}$ ⑤ $\frac{43}{7}$

해설

구하는 기약 분수를 $\frac{a}{b}$ 로 놓으면
 $a = 40, b = 7$ 이므로 $\frac{a}{b} = \frac{40}{7}$

2. $2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7^2$ 의 약수의 개수를 구하여라. [배점 2, 하중]

▶ 답:

▶ 정답: 72 개

해설

$$(3 + 1) \times (1 + 1) \times (2 + 1) \times (2 + 1) = 72 \text{ (개)}$$

3. 252를 소인수분해한 후, 소인수의 합을 바르게 구한 것은? [배점 2, 하중]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 15

해설

$$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7, \text{ 소인수 : } 2, 3, 7$$

$$2 + 3 + 7 = 12$$

4. 세 수 60, 90, 150 의 공약수 중에서 소수의 합을 구하여라. [배점 2, 하중]

▶ 답:

▶ 정답: 10

해설

60, 90, 150 의 최대공약수 : 30

공약수 중 소수 : 2, 3, 5

$$(\text{소수의 합}) = 2 + 3 + 5 = 10$$

5. 26 을 이진법의 수로 나타낼 때, 각 자리 수의 숫자를 모두 더하면? [배점 2, 하중]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$26 = 11010_{(2)}$$

$$1 + 1 + 1 = 3$$

6. 108 의 약수의 개수를 구하여라. [배점 2, 하중]

▶ 답:

▶ 정답: 12 개

해설

$$108 = 2^2 \times 3^3$$

$$\text{약수의 개수 : } (2 + 1) \times (3 + 1) = 12$$

7. 다음 중 7968의 십진법 전개식으로 올바른 것은?
[배점 2, 하중]

- ① $7 \times 1 + 9 \times 10 + 6 \times 10^2 + 8 \times 10^3$
- ② $7 \times 10 + 9 \times 10^2 + 6 \times 10^3 + 8 \times 10^4$
- ③ $7 \times 10^2 + 9 \times 10^3 + 6 \times 10^4 + 8 \times 10^5$
- ④ $7 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 6 \times 10 + 8 \times 1$
- ⑤ $7 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 8 \times 10$

해설

$$7968 = 7 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 6 \times 10 + 8 \times 1$$

8. 256380 을 십진법의 전개식으로 나타낼 때, 6 이 실제로 나타내는 값은?
[배점 2, 하중]

- ① 60 ② 600 ③ 6000
- ④ 60000 ⑤ 600000

해설

$256380 = 2 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 8 \times 10$
따라서 6 이 실제로 나타내는 값은 $6 \times 10^3 = 6000$ 이다.

9. 다음 중 $11^3 \times 13^5$ 의 약수가 아닌 것은?
[배점 2, 하중]

- ① 11 ② 13 ③ 11×13^4
- ④ $11^2 \times 13^3$ ⑤ $11^4 \times 13^5$

해설

⑤ $11^4 \times 13^5$ 에서 11^4 은 11^3 의 약수가 아니므로 $11^3 \times 13^5$ 의 약수가 아니다.

10. 다음 수 중에서 이진법으로 나타낼 때 쓰이는 1 의 개수가 다른 하나는?
[배점 2, 하중]

- ① 11 ② 14 ③ 19 ④ 20 ⑤ 22

해설

- ① $11 = 1011_{(2)}$
- ② $14 = 1110_{(2)}$
- ③ $19 = 10011_{(2)}$
- ④ $20 = 10100_{(2)}$
- ⑤ $22 = 10110_{(2)}$

11. 석우네 반 남학생 21명과 여학생 28명은 운동경기를 하기 위해조를 짜기로 하였다. 각조에 속하는 여학생의 수와 남학생의 수가 같고 가능한 많은 인원으로조를 편성하려고 한다. 이 때, 몇조까지 만들어지는지 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: 7조

해설

남학생 수와 여학생 수의 최대공약수는 7이다. 따라서 7조까지 만들어진단다.

12. 연필 28개와 지우개 35개모두를 가능한 한 많은 학생에게 똑같이 나누어 주려고 한다. 이때, 몇명에게 나누어 줄 수 있는지 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: 7명

해설

28와 35의 최대공약수는 7이다

13. 6으로 나누면 4가 남고, 8로 나누면 6이 남고, 9로 나누면 7이 남는 자연수 중에서 400에 가장 가까운 수를 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: 430

해설

구하는 수는 (6, 8, 9의 공배수)-2의 꼴이므로 6, 8, 9의 최소공배수는 72이다. 72의 배수 중 400에 가장 가까운 수는 432이다. 따라서 구하는 수는 $432 - 2 = 430$ 이다.

14. 일렬로 늘어서 있는 전구에서 켜진 전구는 1, 꺼진 전구는 0으로 나타낼 때, 5개의 전구를 사용할 경우 나타낼 수 있는 수는 몇가지인지 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: 32가지

해설

전구가 다 꺼졌을 경우: 0

전구가 다 켜졌을 경우: $11111_{(2)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 31$

∴ 0부터 31까지 32가지

15. 이진법의 수 $1101_{(2)}$ 을 $AABA$ 와 같이 나타내기로 약속한다면, 십진법의 수 25는 다음 중 어느 것이 되는가? [배점 3, 하상]

- ① $AAABB$ ② $ABABB$ ③ $ABBAB$
 ④ $AABBA$ ⑤ $AABAB$

해설

$1 = A$, $0 = B$ 로 나타내어진다.
 $25 = 11001_{(2)}$ 이므로 $AABBA$ 이다.

16. 이진법으로 나타낸 수 $1100_{(2)}$ 을 바둑돌로 ●●○○과 같이 나타낼 때, ●○○●●○을 이진법으로 나타내고, 십진법으로 나타낸 수 17을 바둑돌을 이용하여 나타내면? [배점 3, 하상]

- ① $11100_{(2)}$ ●○○●○○
 ② $101110_{(2)}$ ●○○○○●
 ③ $10011_{(2)}$ ●●○○○●
 ④ $10011_{(2)}$ ●○○●●●
 ⑤ $10110_{(2)}$ ●●○○●○

해설

● = 1, ○ = 0
 ●○○●●○ = $10110_{(2)}$
 $2 \overline{) 17}$
 $2 \overline{) 18} \dots 1$
 $2 \overline{) 14} \dots 0$
 $2 \overline{) 12} \dots 0$
 $2 \overline{) 11} \dots 0$
 $2 \overline{) 10} \dots 1$
 $17 = 10001_{(2)} = \bullet \circ \circ \circ \bullet$

17. 다음 수를 소인수분해한 것 중에 옳지 않은 것은?
[배점 3, 하상]

- ① $36 = 2^2 \times 3^2$ ② $60 = 3 \times 4 \times 5$
③ $98 = 2 \times 7^2$ ④ $105 = 3 \times 5 \times 7$
⑤ $120 = 2^3 \times 3 \times 5$

해설

② $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

18. $2^3 \times 3 \times 5$, $2^2 \times 5^2$ 의 공약수가 될 수 없는 것은?
[배점 3, 하상]

- ① 1 ② 2^2 ③ 2×5
④ 5^2 ⑤ $2^2 \times 5$

해설

두 수의 최대공약수가 $2^2 \times 5$ 이므로 5^2 은 공약수가 될 수 없다.

19. 세 수 16, 6, 2×3^2 의 공배수 중 300 에 가장 가까운 수는?
[배점 3, 하상]

- ① 308 ② 302 ③ 295
④ 291 ⑤ 288

해설

세 수의 최소공배수는 $2^4 \times 3^2 = 144$ 이므로 세 수의 공배수는 144 의 배수가 된다.
따라서 144, 288, 432, ... 중 300 에 가장 가까운 수를 찾는다.

20. 60 에 어떤 자연수를 곱하여 자연수의 제곱이 되게 하려고 할 때, 곱할 수 있는 수 중에서 가장 작은 자연수는?
[배점 3, 하상]

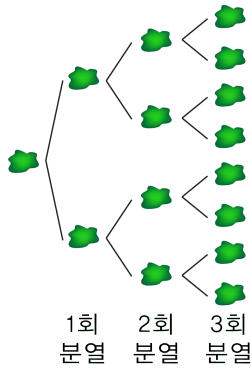
- ① 3 ② 5 ③ 12 ④ 15 ⑤ 20

해설

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

곱해야 할 가장 작은 자연수는 $3 \times 5 = 15$

21. 아메바는 둘로 분열하는 과정을 통해 번식을 한다. 아메바가 한 마리가 다음 그림과 같이 분열을 반복할 때, 전체 아메바가 50 마리 이상이 되려면 아메바가 최소 몇 회 분열을 하여야 하는가? (단, 아메바는 각각 한 번씩만 분열하는 것으로 가정한다.)



[배점 3, 중하]

- ① 4 회 ② 5 회 ③ 6 회
④ 7 회 ⑤ 8 회

해설

아메바 한 마리가 1 회 분열을 하면 2 마리가 생성되어 전체 아메바는 $1 + 2 = 3$ (마리)가 된다. 아메바는 각각 한 번씩만 분열하므로 2 회 분열에서는 새로 생성된 2 마리만 각자 분열을 하여 $2 \times 2 = 4$ (마리)가 더 생성된다. 따라서 총 마리수는 $1 + 2 + 2^2 = 7$ (마리)가 된다. 그 다음 3 회 분열을 하면 $1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 15$ (마리)가 된다. 이런 방식으로 분열이 진행될 때마다의 총 마리수를 표로 정리하면 다음과 같다.

분열	총 마리 수(마리)
1회 분열	3
2회 분열	7
3회 분열	15
4회 분열	31
5회 분열	63
⋮	⋮

따라서 최소 5 회 분열을 해야 아메바의 총 마리수가 50 마리 이상이 된다.

22. $2^a = 64$, $3^b = 81$, $5^3 = c$ 를 만족하는 세 자연수 a , b , c 에 대하여 $c - a - b$ 의 값을 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 115

해설

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 2 \times 2 = 4$$

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

⋮

$$2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$$

이므로 $a = 6$ 이다.

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

이므로 $b = 4$ 이다.

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125 \text{ 이므로 } c = 125 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } c - a - b = 125 - 6 - 4 = 115 \text{ 이다.}$$

23. 다음 중에서 이진법의 전개식으로 옳게 나타낸 것은?
[배점 3, 중하]

- ① $1000_{(2)} = 1 \times 2^4$
 ② $10101_{(2)} = 1 \times 2^3 + 1 \times 1$
 ③ $11010_{(2)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 1$
 ④ $110110_{(2)} = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2$
 ⑤ $1111_{(2)} = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 1 \times 10 + 1 \times 1$

해설

- ① $1000_{(2)} = 1 \times 2^3$
 ② $10101_{(2)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 1$
 ③ $11010_{(2)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2$
 ④ $110110_{(2)} = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2$
 ⑤ $1111_{(2)} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 1$

24. 두 수의 곱이 504 이고 최소공배수가 168 일 때, 이 두 자연수의 최대공약수는?
[배점 3, 중하]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

(두 수의 곱)=(최대공약수) $\times$ (최소공배수)이므로
 $504 = (\text{최대공약수}) \times 168$
 최대공약수는 3 이다.

25. 두 수의 곱이 $2^3 \times 3^5 \times 7^2$ 이고, 최대공약수가 $2 \times 3^2 \times 7$ 일 때, 두 수의 최소공배수는?
[배점 3, 중하]

- ① $2 \times 3 \times 7$ ② $2^2 \times 3^3 \times 7$
 ③ $2 \times 3^2 \times 7$ ④ $2 \times 3^3 \times 7$
 ⑤ $2 \times 3 \times 7^2$

해설

(두 수의 곱)=(최대공약수) $\times$ (최소공배수)이므로
 $2^3 \times 3^5 \times 7^2 = 2 \times 3^2 \times 7 \times (\text{최소공배수})$
 최소공배수는 $2^2 \times 3^3 \times 7$ 이다.

26. 두 자연수의 곱이 720 이고 최대공약수가 6 일 때, 두 수의 최소공배수를 구하여라.
[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 120

해설

(두 수의 곱)=(최대공약수) $\times$ (최소공배수)이므로
 $720 = 6 \times (\text{최소공배수})$
 따라서 최소공배수는 120 이다.

27. 가로가 18cm, 세로가 12cm 인 직사각형 모양의 종이가 여러 장 있다. 이 종이들을 이어 붙여서 가장 작은 정사각형의 모양을 만들려고 한다. 직사각형 모양의 종이는 모두 몇 장이 필요한지 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 6 장

해설

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 18 \ 12} \\ \underline{3 \ 2} \end{array}$$

한 변의 길이가 36cm 인 정사각형 모양을 만들어야 하므로 $3 \times 2 = 6$ (장)이 필요하다.

28. 다음 중 소수를 모두 골라라.

1 13 15 24 29 32 33 52 71 98

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : 13

▶ 정답 : 29

▶ 정답 : 71

해설

주어진 수 중에서 소수는 13, 29, 71 이다.

29. 집합 $A = \{x | x \text{는 } 9 \text{의 약수}\}$ 일 때, 다음 중 A 의 원소를 모두 골라라. [배점 3, 중하]

① $11_{(2)}$

② $101_{(2)}$

③ $110_{(2)}$

④ $111_{(2)}$

⑤ $1001_{(2)}$

해설

① $11_{(2)} = 1 \times 2 + 1 \times 1 = 3$

② $101_{(2)} = 1 \times 2^2 + 1 \times 1 = 5$

③ $110_{(2)} = 1 \times 2^2 + 1 \times 2 = 6$

④ $111_{(2)} = 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 7$

⑤ $1001_{(2)} = 1 \times 2^3 + 1 \times 1 = 9$

30. 세 자연수 A, B, C 의 최소공배수가 26 일 때, A, B, C 의 공배수 중 80 이하의 자연수는 몇 개인가?

[배점 3, 중하]

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

세 자연수의 공배수는 최소공배수의 배수를 구하면 된다.

세 자연수 A, B, C 의 최소공배수가 26 이므로 A, B, C 의 공배수 중 80 이하의 자연수는 26, 52, 78 이다.

따라서 3 개이다.

31. 남자 70 명, 여자 56 명인 어떤 모임에서 조 대항 장기자랑을 하려고 한다. 조별 인원수가 같고, 각 조에 속하는 남녀의 비가 같도록 최대한 많은 수의 조를 짤 때, 각 조별 남, 녀의 수는? [배점 4, 중중]

- ① 남 : 7 명, 여 : 6 명 ② 남 : 6 명, 여 : 5 명
 ③ 남 : 6 명, 여 : 4 명 ④ 남 : 5 명, 여 : 5 명
 ⑤ 남 : 5 명, 여 : 4 명

해설

조의 개수는 70 과 56 의 최대공약수이다.
 $70 = 2 \times 5 \times 7$, $56 = 2^3 \times 7$
 따라서 조의 개수는 $2 \times 7 = 14$ (개)
 조별 남학생의 수는 $70 \div 14 = 5$ (명), 여학생의 수는 $56 \div 14 = 4$ (명)이다.

32. 굴 60 개, 배 45 개, 감 30 개를 하나도 빠짐없이 되도록 많은 사람들에게 똑같이 나누어주려고 한다. 몇 사람에게 나누어주면 되는지 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 15 명

해설

구하고자 하는 학생 수는 60, 45, 30 의 최대공약수이므로 15 (명)이다.

33. 다음 밑줄 친 수가 실제로 나타내는 값이 가장 작은 것은? [배점 4, 중중]

- ① $100_{(2)}$ ② $100111_{(2)}$
 ③ $110_{(2)}$ ④ $110101_{(2)}$
 ⑤ $10011_{(2)}$

해설

각각의 밑줄 친 1 이 나타내는 수는

- ① $2^2 = 4$
 ② 1
 ③ 2
 ④ $2^2 = 4$
 ⑤ $2^4 = 16$
 이다.

34. 다음 밑줄 친 숫자 중 $1100_{(2)}$ 에서 밑줄 친 1 이 실제로 나타내는 값과 같은 값을 나타내는 것은?

[배점 4, 중중]

- ① 159 ② 1248 ③ 2278
 ④ 9639 ⑤ 10004

해설

밑줄 친 1 이 나타내는 수는 $1 \times 2^2 = 4$

35. $A = \{x | x \text{는 } 108 \text{의 소인수}\}$, $B = \{x | x \text{는 } 147 \text{의 소인수}\}$ 일 때, $A - B$ 는?

[배점 4, 중중]

- ① {2} ② {3} ③ {2, 3}
④ {3, 7} ⑤ {5, 7}

해설

$108 = 2^2 \times 3^3$, $147 = 3 \times 7^2$ 이므로
 $A = \{2, 3\}$, $B = \{3, 7\}$ 이다.
 $\therefore A - B = \{2\}$

36. 세 수 6, 8, 12 어느 것으로 나누어도 나머지가 5 인 가장 작은 세 자리의 자연수를 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 101

해설

구하는 수를 A 라 하면
 $A = (6, 8, 12 \text{의 공배수}) + 5$ 인 수 중 가장 작은 세 자리 자연수,
6, 8, 12 의 최소공배수는 24 이다.
24 의 배수는 24, 48, 72, 96, 120, ...
따라서 $A = 96 + 5 = 101$ 이다.

37. 두 자연수 A, B 의 최대공약수는 9, 최소공배수는 360 이고, $A + B = 117$ 일 때, $A - B$ 를 구하여라. (단, $A > B$)

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 27

해설

$A = 9a$, $B = 9b$ 라고 하면
(단, a, b 는 서로소, $a > b$)
최소공배수 $360 = 9 \times 40 = 9 \times a \times b$ 이다.
 $a \times b = 40$ 이고 $A > B$ 이므로
 $a = 40, b = 1$ 일 때 $A = 360, B = 9$,
 $a = 20, b = 2$ 일 때 $A = 180, B = 18$,
 $a = 10, b = 4$ 일 때 $A = 90, B = 36$,
 $a = 8, b = 5$ 일 때 $A = 72, B = 45$,
 $A + B = 117$ 이므로 $A = 72, B = 45$ 이다.
 $\therefore A - B = 27$

38. $10 \times x$, $12 \times x$ 의 최소공배수가 360 이라고 할 때 x 의 값은 얼마인가? [배점 4, 중중]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$10 \times x, 12 \times x$ 의 최소공배수는 $2^2 \times 3 \times 5 \times x = 360$ 이다.
따라서 $x = 6$ 이다.

39. 어떤 수로 35 를 나누면 3 이 남고 118 을 나누면 2 가 모자란다고 한다. 이러한 수 중 가장 큰 수는?

[배점 4, 중중]

- ① 16 ② 8 ③ 6 ④ 4 ⑤ 2

해설

32 와 120 의 최대공약수이므로 8 이다.

40. $3^3 = a$, $11^b = 121$ 을 만족하는 자연수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

[배점 4, 중중]

- ① 29 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 46

해설

$3^3 = 27$, $11^2 = 121$ 이므로 $a = 27$, $b = 2$ 이다.
따라서 $a + b = 29$ 이다.

41. $2^8 = a$, $3^b = 729$ 을 만족하는 a, b 의 값을 각각 구하면?

[배점 4, 중중]

- ① $a = 128$, $b = 5$ ② $a = 128$, $b = 6$
③ $a = 256$, $b = 5$ ④ $a = 256$, $b = 6$
⑤ $a = 256$, $b = 7$

해설

$2^8 = 256$, $3^6 = 729$ 이므로 $a = 256$, $b = 6$ 이다.

42. $2^5 = a$, $3^b = 243$ 을 만족하는 a, b 의 값을 각각 구하면?

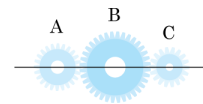
[배점 4, 중중]

- ① $a = 16$, $b = 4$ ② $a = 16$, $b = 5$
③ $a = 32$, $b = 4$ ④ $a = 32$, $b = 5$
⑤ $a = 32$, $b = 6$

해설

$2^5 = 32$, $3^5 = 243$ 이므로 $a = 32$, $b = 5$ 이다.

43. 톱니의 수가 각각 24, 36, 18 개인 톱니바퀴 A, B, C 가 다음 그림과 같이 서로 맞물려 있다. 세 톱니바퀴가 회전하기 시작하여 모두 다시 처음의 위치로 돌아오려면 C 는 최소한 몇 바퀴를 회전해야 하는지 구하여라.



[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4바퀴

해설

24, 36, 18 의 최소공배수는 72,
∴ C 바퀴의 회전수는 $72 \div 18 = 4$ (바퀴) 이다.

44. 세 수 250, 360, 960 의 최대공약수는?

[배점 4, 중중]

- ① 2^2 ② 2×5
 ③ $2^2 \times 5^2$ ④ $2 \times 3 \times 5$
 ⑤ $2^2 \times 3 \times 5$

해설

$250 = 2 \times 5^3$, $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$,
 $960 = 2^6 \times 3 \times 5$ 이므로
 최대공약수는 2×5

45. 세 수 $2^3 \times 3 \times 5$, $2^2 \times 3^2 \times 5$, $2^2 \times 3^3 \times 5^2$ 의 최대공약수는?
 [배점 4, 중중]

- ① $2^3 \times 3^3 \times 5^2$ ② $2^3 \times 3^2 \times 5$
 ③ $2^2 \times 3 \times 5$ ④ $2^2 \times 3^2 \times 5^2$
 ⑤ $2^3 \times 3^3 \times 5^3$

해설

$2^3 \times 3 \times 5$, $2^2 \times 3^2 \times 5$, $2^2 \times 3^3 \times 5^2$ 에서
 최대공약수: $2^2 \times 3 \times 5$ (지수가 작은 쪽)

46. 17 을 이진법의 수로 나타내었을 때, 각 자리의 숫자의 합을 십진법의 수로 나타내면? [배점 4, 중중]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$17 = 10001_{(2)}$ 이므로 각 자리 숫자의 합은 2

47. $\frac{24}{n}$ 와 $\frac{40}{n}$ 을 자연수로 만드는 자연수 n 들을 모두 합하면? [배점 4, 중중]

- ① 8 ② 12 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설

n 은 24, 40 의 공약수이고, 공약수는 최대공약수의 약수이다.
 24 와 40 의 최대공약수는 8 이고,
 8 의 약수는 1, 2, 4, 8 이므로
 따라서 합은 $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ 이다.

48. ●○○은 이진법으로 나타낸 수 $101_{(2)}$ 을 의미한다.
십진법으로 나타낸 수 22를 바르게 나타낸 것은?

[배점 4, 중중]

- ① ●●○○○● ② ●○●○○●
③ ●●●○○○ ④ ●●○○●○
⑤ ●○●●○○

해설

$22 = 10110_{(2)}$ 이므로 ⑤이다.

49. 두 자연수의 최소공배수가 16 일 때, 두 자연수의 공배수의 집합을 원소나열법으로 나타낸 것은

[배점 4, 중중]

- ① {1, 2, 4, 8, 16} ② {4, 16, 64, ...}
③ {16, 32, 48} ④ {4, 8, 16, 32, ...}
⑤ {16, 32, 48, 64, ...}

해설

공배수는 최소공배수의 배수이므로, 두 자연수의 공배수는 16의 배수로 이루어진 집합이다.

50. 두 수 $2^2 \times 3 \times 7$, $2^3 \times 3^2 \times 5$ 의 최소공배수는?

[배점 4, 중중]

- ① $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ ② $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$
③ $2^3 \times 3 \times 5 \times 7$ ④ $2^3 \times 3^2$
⑤ $2^2 \times 3 \times 7$

해설

$2^2 \times 3 \times 7$, $2^3 \times 3^2 \times 5$

최소공배수: $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 이다.

51. 세 사람 A, B, C가 있다. A는 11일 동안 일하고 1일을 쉬고, B는 13일 동안 일하고 2일을 쉬며, C는 15일 동안 일하고 3일을 쉰다. 세 사람이 동시에 일을 시작했을 때, 다시 다음에 동시에 쉬는 날은 며칠 후인가?

[배점 4, 중중]

- ① 90일 후 ② 180일 후 ③ 300일 후
④ 360일 후 ⑤ 420일 후

해설

$A : 12 = 2^2 \times 3$, $B : 15 = 3 \times 5$, $C : 18 = 2 \times 3^2$
12와 15, 18의 최소공배수는 $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$ 이다.

180일 후에 세 사람 A, B, C가 다시 동시에 일을 시작한다.

52. 어떤 자연수를 3 으로 나누니 18 와 24 의 공배수가 되었다. 어떤 자연수가 될 수 있는 가장 작은 수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 216

해설

18 과 24 의 최소공배수는 72 이다. 3 으로 나누어서 72 가 되는 수는 $72 \times 3 = 216$ 이다.

53. 두 집합 $A = \{16, 32, 48, 64, \dots\}, B = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$ 에 대하여 다음 중 $A \cap B$ 는? [배점 4, 중중]

- ① $\{x|x\text{는 }6\text{의 배수}\}$
- ② $\{x|x\text{는 }16\text{의 배수}\}$
- ③ $\{x|x\text{는 }48\text{의 배수}\}$
- ④ $\{x|x\text{는 }96\text{의 배수}\}$
- ⑤ $\{x|x\text{는 }112\text{의 배수}\}$

해설

$A \cap B$ 는 16 과 6 의 최소공배수인 48 의 배수의 집합이다.

54. 300 을 가장 작은 자연수 a 로 나누어 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라 [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 13

해설

$$\begin{aligned} 300 \div a &= b^2 \text{ 에서} \\ 300 &= 2^2 \times 3 \times 5^2 \\ a &= 3 \\ 2^2 \times 3 \times 5^2 \div 3 &= b^2 \\ 2^2 \times 5^2 &= b^2 \\ b &= 2 \times 5 = 10 \end{aligned}$$

55. $63 \times a = b^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 a, b 에 대하여 $\frac{b^2}{a^2}$ 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} 3^2 \times 7 \times a &= b^2 \\ \text{가장 작은 } a &= 7, \\ 3^2 \times 7 \times 7 &= 3^2 \times 7^2 = b^2 \\ b &= 3 \times 7 = 21 \\ \frac{b^2}{a^2} &= \frac{3^2 \times 7^2}{7^2} = 9 \end{aligned}$$

56. 24 에 가장 작은 자연수 a 를 곱하여 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, $a + b$ 의 값은?

[배점 4, 중중]

- ① 2 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 18

해설

$$\begin{aligned} 24 \times a &= b^2 \\ 2^3 \times 3 \times a &= b^2 \\ a &= 2 \times 3 = 6 \\ 2^3 \times 3 \times 2 \times 3 &= 2^4 \times 3^2 = b^2 \\ b &= 2^2 \times 3 = 12 \\ \therefore a + b &= 18 \end{aligned}$$

57. 다음 1 보다 큰 자연수 중에서 1 과 그 수 자신만을 약수로 가지는 수는?

[배점 4, 중중]

- ① 8 ② 22 ③ 26
④ 100 ⑤ 103

해설

1 보다 큰 자연수 중에서 1 과 그 수 자신만을 약수로 가지는 수는 소수이다.
따라서 소수인 것은 103 이다.

58. 540 에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 어떤 수는? [배점 4, 중중]

- ① 3 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 15

해설

$$\begin{aligned} 540 &= 2^2 \times 3^3 \times 5 \\ 540 \times x &\text{가 제곱수가 되기 위한 가장 작은 } x \text{ 는} \\ 3 \times 5 &= 15 \end{aligned}$$

59. 다음 중 거듭제곱의 표현으로 옳은 것은?

[배점 4, 중중]

- ① $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 4^2$
② $6 \times 6 = 2^6$
③ $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 6^3$
④ $5 + 5 + 5 + 5 = 4^5$
⑤ $\frac{3 \times 3 \times 3}{4 \times 4 \times 4} = \frac{3^3}{4^3}$

해설

- ① $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$
② $6 \times 6 = 6^2$
③ $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^3$
④ $5 + 5 + 5 + 5 = 20$

60. 다음 세 수 $2^a \times 3^5 \times 7^2 \times 150$, $2^5 \times 3^b \times 5^2 \times 7^3$, $2^4 \times 5^c \times 7^d \times 54$ 의 최대공약수가 $2^3 \times 3 \times 70$ 일 때, $(a+b+c) \times d$ 의 값은? [배점 4, 중중]

① 3 ② 5 ③ 8 ④ 9 ⑤ 12

해설

최대공약수가 $2^3 \times 3 \times 70 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7$ 이고
주어진 각 수를 정리한 값이

$$2^a \times 3^5 \times 7^2 \times 150 = 2 \times 2^a \times 3^6 \times 5^2 \times 7^2$$

$$2^5 \times 3^b \times 5^2 \times 7^3$$

$$2^4 \times 5^c \times 7^d \times 54 = 2^5 \times 3^3 \times 5^c \times 7^d \text{ 이다.}$$

주어진 세 수의 2 의 지수를 비교하면 모두 4 보다
크므로

$2 \times 2^a \times 3^6 \times 5^2 \times 7^2$ 에서 2 의 지수는 4 이어야한다
2 가 한 번 더 곱해져 있으므로, a 는 3 이어야 한다.

주어진 세 수의 3 의 지수를 비교하면
모두 1 보다 크므로 b 는 1 이어야 한다.

주어진 세 수의 5 의 지수를 비교하면
모두 1 보다 크므로 c 는 1 이어야 한다.

주어진 세 수의 7 의 지수를 비교하면
모두 1 보다 크므로 d 는 1 이어야 한다.

따라서 $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$ 이므로
 $(a + b + c) \times d = (3 + 1 + 1) \times 1 = 5$ 이다.

61. 볼펜 24 개, 연필 72 개, 지우개 48 개를 되도록 많은
학생들에게 똑같이 나누어 주려고 한다. 이 때, 한 학
생이 받는 모든 물건의 개수는 총 몇 개인지 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6 개

해설

$$24 = 2^3 \times 3, 72 = 2^3 \times 3^2, 48 = 2^4 \times 3 \text{ 이므로}$$

$$24, 72, 48 \text{ 의 최대공약수는 } 2^3 \times 3 = 24$$

따라서 한 사람이 받는 물건은 볼펜 1 개, 연필 3
자루, 지우개 2 개이므로

총 개수는 6 이다.

62. $2^4 \times 3^7 \times 5^5 \times 7^2 \times 10^2$ 을 계산하여 십진법으로 나
타낼 때, 마지막 자릿수부터 연속하여 나타나는 0 의
개수는? [배점 5, 중상]

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개

④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

10 의 거듭제곱이 몇 번 곱해졌는지를 구하면 된
다.

$$2^4 \times 3^7 \times 5^5 \times 7^2 \times 10^2 = 3^7 \times 7^2 \times 5 \times 10^6 \text{ 이므로}$$

마지막 자릿수부터 연속하여 나타나는 0 의 개수는
6 개이다.

63. $5^4 \times \square$ 의 약수의 개수가 15 개일 때, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 가장 작은 자연수를 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 4

해설

$\square = a^x$ (a 는소수) 라고 하면 $5^4 \times a^x$ 의 약수의 개수는 15개이므로

$(4+1) \times (x+1) = 15, x+1 = 3, x = 2$ 이다.

또한 가장 작은 자연수가 되기 위해서는 $a = 2$ 이다.

따라서 $\square = a^x = 2^2 = 2 \times 2 = 4$ 이다.

64. $2^4 \times 3^3 \times 5^3 \times 11^{10}$ 을 계산하여 십진법으로 나타낸 수로 바꿀 때, 마지막 자릿수부터 연속하여 나타나는 0의 개수는? [배점 5, 중상]

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개
④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

십진법으로 나타낼 때 끝자리에서 계속되는 0의 개수는 10의 거듭제곱과 관계가 있다. 즉, 10의 배수가 아닌 자연수 a 에 대하여 $N = a \times 10^n$ 일 때, N 의 끝자리에서 계속되는 0은 n 개이다.

$$2^4 \times 3^3 \times 5^3 \times 11^{10}$$

$$= 3^3 \times 11^{10} \times (2^4 \times 5^3)$$

$$= 3^4 \times 11^{10} \times 2 \times (2^3 \times 5^3)$$

$$= 3^4 \times 11^{10} \times 2 \times 10^3$$

따라서 끝자리에서 연속되는 0은 3개이다.

65. $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 9 \times 10$ 을 십진법으로 나타낼 때, 끝자리에 연속한 0의 개수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 2개

해설

십진법으로 나타낼 때 끝자리에서 계속되는 0의 개수는 10의 거듭제곱과 관계가 있다. 즉, 10의 배수가 아닌 자연수 a 에 대하여 $N = a \times 10^n$ 일 때, N 의 끝자리에서 계속되는 0은 n 개이다.

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 9 \times 10$$

$$= 1 \times 2 \times 3 \times (2 \times 2) \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (2 \times 5)$$

$$= 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$$

$$= 3^4 \times 7 \times (2^8 \times 5^2)$$

$$= 3^4 \times 7 \times 2^6 \times (2^2 \times 5^2)$$

$$= 3^4 \times 7 \times 2^6 \times 10^2$$

따라서 끝자리에서 연속되는 0은 2개이다.

66. 세 수 $\frac{5}{15}, \frac{5}{18}, \frac{5}{24}$ 의 어느 것에 곱하여도 그 결과가 자연수가 되는 분수 중에서 가장 작은 기약분수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 72

해설

$$\frac{(15, 18, 24 \text{의 최소공배수})}{(5, 5, 5 \text{의 최대공약수})} = \frac{360}{5} = 72$$

67. 서로 다른 세 수 32, 80, a 의 최대공약수가 16 일 때, a 의 값이 될 수 있는 두 자리 자연수를 모두 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답 :
▶ 답 :
▶ 답 :
▶ 답 :

▷ 정답 : 16
▷ 정답 : 48
▷ 정답 : 64
▷ 정답 : 96

해설

$$16 \overline{) \begin{array}{r} 32 \quad 80 \quad a \\ 2 \quad 5 \quad \square \end{array}}$$

세 수를 16 으로 나눈 몫이 각각 2, 5, $\square$ 이고, 최대공약수는 16 을 만족하여야 한다.

따라서 a 는 16 의 배수가 되는 두 자리 자연수이다.

또한 $\square$ 안에 들어갈 수는 1, 3, 4, 6 이므로 (서로 다른 세 수 이므로 2 와 5 는 안된다.)

a 의 값은 각각 16, 48, 64, 96 이다.

68. 세 수 12, 18, a 의 최소공배수가 396 일 때, a 의 최솟값을 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$12 = 2^2 \times 3$, $18 = 2 \times 3^2$, $396 = 2^2 \times 3^2 \times 11$
이므로,

a 값이 될 수 있는 수는 $2^x \times 3^y \times 11$ (x, y 는 0 또는 1 또는 2)이며,
최솟값을 가질 때는 x, y 가 0 일 때이므로 a 의 최솟값은 11 이다.

69. 두 자연수 $84 \times a$ 와 $2^2 \times 7 \times 10 \times a$ 의 공약수가 12 개일 때 최소의 a 의 값을 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$84 \times a = 2^2 \times 3 \times 7 \times a$, $2^2 \times 7 \times 10 \times a = 2^3 \times 5 \times 7 \times a$
두 수의 최대공약수는 $2^2 \times 7 \times a$,

공약수의 개수, 즉 최대공약수의 약수가 12 개이므로

최대공약수는 $2^3 \times 7^2$ 또는 $2^2 \times 7^3$ 또는 $2^2 \times 7 \times x$ (단, x 는 2, 7 이 아닌 소수)이다.

최소의 a 값이므로 $a = 3$ 이다.

70. 정화는 10 층 아파트에서 살고 있는데, 엘리베이터가 자주 고장이 난다. 어느 날 엘리베이터 입구에 ‘약수의 개수가 2 개인 층에서만 쏩니다.’ 라는 문구가 적혀 있었을 때, 엘리베이터가 서는 층이 아닌 것은?
[배점 5, 중상]

- ① 2 층 ② 3 층 ③ 5 층
④ 7 층 ⑤ 9 층

해설

약수의 개수가 2 개인 층은 소수인 층이다. 따라서 10 이하의 소수는 2, 3, 5, 7 이므로 엘리베이터가 서지 않는 층은 9 층이다.

71. 다음 중 옳은 것은? [배점 5, 상하]

- ① $2^3 = 6$
② $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 12$
③ $2 \times 2 \times 7 \times 7 = 2^2 \times 7^2 = 4 \times 49 = 196$
④ $\frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$
⑤ $\frac{1}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5} = \frac{1}{2^2 \times 3 \times 5} = \frac{1}{60}$

해설

- ① $2^3 = 8$
② $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$
④ $\frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$
⑤ $\frac{1}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5} = \frac{1}{2^2 \times 3^2 \times 5^2} = \frac{1}{900}$

72. 자연수 전체의 집합의 두 부분집합

$A = \{x | x \text{는 삼진법으로 나타냈을 때 세 자리 수가 되는 십진수}\}$,

$B = \{x | x \text{는 3으로 나누었을 때 나머지가 1}\}$ 일 때, $n(A \cap B)$ 를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 6

해설

삼진법의 세 자리 수는 $100_{(3)}$ 부터 $222_{(3)}$ 까지이고, 십진수로는 9 부터 26 까지이다.

$$\rightarrow A = \{9, 10, 11, \dots, 26\}$$

$$\rightarrow B = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$$

$$A \cap B = \{10, 13, 16, 19, 22, 25\}$$

$$\therefore n(A \cap B) = 6$$

73. 세 자연수 18, 45, x 의 최대공약수가 9, 최소공배수가 270일 때, x 가 될 수 있는 수를 모두 구하여라.
[배점 5, 상하]

▶ 답 :
▶ 답 :
▶ 답 :
▶ 답 :

▷ 정답 : 27

▷ 정답 : 54

▷ 정답 : 135

▷ 정답 : 270

해설

270의 약수는 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 27, 30, 45, 54, 90, 135, 270이다.

이 수 중 18, 45과 최대공약수가 9, 최소공배수가 270을 만족하는 수를 찾으면

$$x = 27, 54, 135, 270$$

74. 자연수 x, y 에 대하여 x, y 의 최대공약수는 (x, y) , 최소공배수는 $[x, y]$ 로 나타내기로 한다. $(a, b, c) = 7$, $(a, b) = 14$, $[a, b] = 84$, $(b, c) = 21$, $[b, c] = 126$ 일 때, $[a, b, c]$ 를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 252

해설

$(a, b, c) = 7 \rightarrow a, b, c$ 는 인수 7을 가진다.

$(a, b) = 14 \rightarrow a, b$ 는 인수 2, 7을 가진다.

$(b, c) = 21 \rightarrow b, c$ 는 인수 3, 7을 가진다.

$\rightarrow b$ 는 인수 2, 3, 7을 가진다.

$[b, c] = 126 \rightarrow b$ 의 인수 2의 지수는 1이다.

$[a, b] = 84 \rightarrow a = 2^2 \times 7, b = 2 \times 3 \times 7,$

$(b, c) = 21, [b, c] = 126 \rightarrow c = 3^2 \times 7$

$\therefore [a, b, c] = 2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$

75. 두 자리 자연수 n 과 48의 최대공약수가 12이고 $(n + 45)$ 가 13의 배수일 때, n 과 45의 최소공배수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 360

해설

$$n = 12 \times a,$$

$n + 45 = 12 \times a + 45 = 13 \times b$ 를 만족하는 $12 \times a + 45$ 는 117이고 n 은 72이다.

$\therefore (72 \text{와 } 45 \text{의 최소공배수}) = 360$

76. 9로 나누어 떨어지는 두 자연수 A, B 의 최소공배수가 315 일 때, 순서쌍 (A, B) 를 모두 찾아라.

[배점 5, 상하]

- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :

- ▷ 정답 : (9, 315)
- ▷ 정답 : (45, 63)
- ▷ 정답 : (45, 315)
- ▷ 정답 : (63, 315)
- ▷ 정답 : (315, 315)
- ▷ 정답 : (315, 63)
- ▷ 정답 : (315, 45)
- ▷ 정답 : (63, 45)
- ▷ 정답 : (315, 9)

해설

A, B 는 모두 3^2 을 인수로 가지고 있고,
 $315 = 3^2 \times 5 \times 7$ 이므로,
 따라서 순서쌍은 $(A, B) =$
 $(9, 315), (45, 63), (45, 315), (63, 315),$
 $(315, 315), (315, 63), (315, 45), (63, 45), (315, 9)$
 이다.

77. 두 자리 자연수 a, b 의 곱은 735 이고, $a + b$ 와 $a - b$ 의 최대공약수는 14 일 때, a, b 의 최대공약수를 구하여라. (단, $a > b$)

[배점 5, 상하]

- ▶ 답 :
- ▷ 정답 : 7

해설

$735 = 3 \times 5 \times 7^2$ 이므로, 두 자리 a, b 의 순서쌍은 다음과 같다.

$(a, b) = (49, 15), (35, 21),$

위 순서쌍이 $a + b$ 와 $a - b$ 의 최대공약수 14를 만족시켜야 하므로,

$\rightarrow a = 35, b = 21$

$\therefore a, b$ 의 최대공약수 = 7

78. 1부터 어떤 자연수 n 까지의 곱을 $n!$ 이라고 한다. $25!$ 을 계산하였을 때, 일의 자리부터 연속되어 나타나는 0의 개수를 구하여라.

[배점 5, 상하]

- ▶ 답 :
- ▷ 정답 : 6개

해설

일의 자리부터 연속되어 나타나는 0의 개수는 10의 거듭제곱의 개수이다.

$10 = 2 \times 5$ 이므로 $25!$ 에서 2×5 의 인수를 찾아 보면,

$2 \times 4 \times 5 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 \times 14 \times 15 \times 16 \times 18 \times$
 $20 \times 22 \times 24 \times 25 = (2 \times 5)^6 \times a$

$\therefore 25!$ 에서 일의 자리부터 연속되어 나타나는 0의 개수 = 6개

79. $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 16$ 이 4^n 으로 나누어 떨어지는 자연수 n 의 최댓값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 16 = 1 \times 4^{\frac{1}{2}} \times 3 \times 4 \times 5 \times (4^{\frac{1}{2}} \times 3) \times 7 \times 4^{\frac{3}{2}} \times 9 \times (4^{\frac{1}{2}} \times 5) \times 11 \times (4 \times 3) \times 13 \times (4^{\frac{1}{2}} \times 7) \times 15 \times 4^2$
 $\rightarrow 4$ 의 인수를 모두 곱하면, $4^{\frac{1}{2}} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 2 = 4^{\frac{7}{2}}$ 이다.
 $\therefore 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 16$ 이 4^n 으로 나누어 떨어지는 자연수 n 의 최댓값은 3이다.

80. 일곱 자리 수 $1706xy2$ 가 8 의 배수도 되고 9 의 배수도 된다. 이 때, $x + y$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

어떤 수가 8 의 배수라면 마지막 두 자리가 8 의 배수이고,
 어떤 수가 9 의 배수라면 각 자리의 수를 더한 값이 9 의 배수이다.
 $y2$ 가 8 의 배수가 되려면 y 는 3 이나 7 이어야 한다.
 $1 + 7 + 0 + 6 + x + y + 2$ 가 9 의 배수가 되려면 $x + y$ 가 2, 11 이어야 한다.
 $\rightarrow y$ 는 3 이나 7 이므로 $x + y$ 는 2 는 될 수 없다.
 $\therefore x + y = 11$

81. 다음 보기를 큰 순서대로 쓰시오.

보기

- | | |
|-------------------|----------------|
| ㉠ 3^2 | ㉡ $2^5 - 1$ |
| ㉢ $101_{(2)} - 1$ | ㉣ $1111_{(2)}$ |
| ㉤ 5^2 | |

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉤

▷ 정답 : ㉣

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉢

해설

- ㉠ 9
- ㉡ 31
- ㉢ 4
- ㉣ 15
- ㉤ 25

82. 네 자리의 정수 $41\square 2$ 가 3 의 배수인 동시에 4 의 배수가 되도록 $\square$ 안에 알맞은 수는? [배점 6, 상중]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

3의 배수는 자리 수의 합이 3의 배수 이므로
 $41\square 2 \Rightarrow 4 + 1 + \square + 2 = 7 + \square$ 에서 $\square$ 안에 들어갈 수 있는 수는 2, 5, 8 이다.
 4의 배수는 마지막 두 자리가 4의 배수이어야 하므로 $41\square 2 \Rightarrow \square 2$ 에서
 $\square$ 안에 들어갈 수 있는 수는 1, 3, 5, 7, 9 이다.
 따라서 동시에 만족하는 수는 5 이다.

83. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개) [배점 6, 상중]

- ① 83 은 소수이다.
 ② 모든 합성수는 약수가 2 개이다.
 ③ 1 은 소수이다.
 ④ 15 이하의 소수의 개수는 6 개이다.
 ⑤ 소수가 아닌 자연수는 모두 합성수이다.

해설

- ② 모든 합성수는 약수가 3 개 이상이다.
 ③ 1 은 소수도 합성수도 아니다.
 ⑤ 소수가 아닌 자연수는 1, 합성수이다.

84. 1g, 3g, 9g, 27g, 81g, 243g 짜리 추와 양팔저울을 이용하여 무게를 재려고 한다. 잴 수 있는 모든 무게의 가짓수를 A , 81g, 243g 짜리 추가 동시에 사용되는 무게의 가짓수를 B 라고 할 때, $A - B$ 를 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 324

해설

1g, 3g, 9g, 27g, 81g, 243g 의 추가 있으므로,
 위의 저울은 1g 부터 $111111_{(3)} = 364(g)$ 까지 무게를 잴 수 있으므로,
 $A = 364$ 가지이다.
 81g, 243g 짜리 추가 동시에 사용되는 무게의 가짓수는 1g, 3g, 9g, 27g 의 추로 잴 수 있는 무게의 가짓수와 같고, 1g, 3g, 9g, 27g 의 추로 잴 수 있는 무게의 가짓수는 1g 부터 $1111_{(3)} = 40g$ 까지 총 40 가지의 무게를 잴 수 있다.
 $\therefore A - B = 324$

85. $\frac{cdb_{(4)}}{2} = aba_{(4)} = abc_{(4)} - 2$ 일 때, $abcd_{(4)}$ 를 십진법의 수로 나타내어라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 108

해설

$$\begin{aligned} aba_{(4)} &= abc_{(4)} - 2 \rightarrow a = c - 2, \\ a, b, c, d &\text{는 모두 4 보다 작으므로 } c = 3, a = 1, \\ \frac{3db_{(4)}}{2} &= 1b1_{(4)} = 1b3_{(4)} - 2, \\ \rightarrow 3db_{(4)} &= 2 \times 1b1_{(4)}, \\ \rightarrow 7b - 4d &= 14, b = 2, d = 0, \\ \therefore abcd_{(4)} &= 1230_{(4)} = 108 \end{aligned}$$

86. $n!$ 은 1 부터 n 까지 모든 자연수의 곱을 말한다. $18!$ 을 이진법의 수로 나타내었을 때, 일의 자리에서 왼쪽으로 연속되는 0 의 갯수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 16 개

해설

$$\begin{aligned} 18! &\text{를 2 의 지수로 묶어보면,} \\ 18! &= 1 \times 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 9 \times (2 \times 5) \times 11 \\ &\times (2^2 \times 3) \times 13 \times (2 \times 7) \times 15 \times 2^4 \times 17 \times (2 \times 9) \\ &= m \times 2^{16} \\ \rightarrow m &\text{은 홀수이므로, 17 번째 자리의 수는 반드시 1 이다.} \\ \text{따라서 일의 자리에서 왼쪽으로 연속되는 0 의 갯수} &\text{는 16 개이다.} \end{aligned}$$

87. $(x-1) : y = 3 : 4$ 일 때, x, y 의 최소공배수가 56 이다. x, y 의 최대공약수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned} (x-1) : y &= 3 : 4 \rightarrow 4 \times (x-1) = 3 \times y, \\ x, y &\text{의 최소공배수가 } 56 = 2^3 \times 7 \\ \text{위 두 조건을 만족시키는 } x, y &\text{의 값은 } x = 7, \\ y &= 8 \text{ 이다.} \\ \therefore (x, y \text{의 최대공약수}) &= 1 \end{aligned}$$

88. 분수 $\frac{x}{y}$ 의 분모에 18 , 분자에 45 를 더해도 분수의 값은 변하지 않는다. x, y 의 최소공배수가 70 일 때, 자연수 x, y 를 각각 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 35$

▷ 정답 : $y = 14$

해설

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{x+45}{y+18} \\ \rightarrow x \times (y+18) &= y \times (x+45) \\ \rightarrow 18x &= 45y \rightarrow 2x = 5y \\ 70 &= 2 \times 5 \times 7 \text{ 이므로} \\ 2x = 5y &\text{를 만족하려면 } x = 35, y = 14 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

89. 두 자연수 A, B 의 최대공약수를 $[A, B]$ 로 나타낼 때, $[A, B] = [C, D] = k$ 이다. 다음을 간단히 하여라.
(단, A 와 C, D, B 와 C, D 는 서로소)

$$\left[\frac{[AB, CD]}{[A+B, C+D]}, \frac{[AD, BC]}{[A+D, B+C]} \right]$$

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : k

해설

$[A, B] = [C, D] = k \rightarrow A, B, C, D$ 모두 인수 k 를 가진다.

AB 와 CD, AD 와 BC 는 모두 인수 k^2 을 가지고,

$(A+B)$ 와 $(C+D), (A+D)$ 와 $(B+C)$ 는 모두 인수 k 를 가진다.

$$\therefore \left[\frac{[AB, CD]}{[A+B, C+D]}, \frac{[AD, BC]}{[A+D, B+C]} \right] = \left[\frac{k^2}{k}, \frac{k^2}{k} \right] = [k, k] = k$$

90. $1231^n + 1232^n + 1233^n + 1234^n$ 의 값이 10 의 배수일 때, 두 자리 자연수 n 의 최댓값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 97

해설

10 의 배수가 되려면 1 의 자리수가 0 이 되어야 한다.

따라서, $1^n + 2^n + 3^n + 4^n = 10k$,

n 을 1 부터 대입하면,

$$1^n \rightarrow 1, 1, 1, 1, 1, \dots,$$

$$2^n \rightarrow 2, 4, 8, 6, 2, \dots,$$

$$3^n \rightarrow 3, 9, 7, 1, 3, \dots,$$

$$4^n \rightarrow 4, 6, 4, 6, \dots,$$

1^n 은 항상 1 이고, $2^n, 3^n$ 이 4 번, 4^n 이 2 번마다 같은 일의 자리 수를 가진다.

이 때, $n = 1$ 일 때 $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ 은 10 의 배수이므로

$$\therefore \text{두 자리 자연수 } n \text{ 의 최댓값} = 1 + 96 = 97$$

91. $2^3 \times 5 \times \square \times 7$ 의 약수의 개수가 32 개라고 한다.
 $\square$ 안에 들어갈 수 있는 수를 작은 수부터 2개를 써라. [배점 6, 상상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 11

해설

$2^3 \times 5 \times \square \times 7$ 의 약수의 개수가 32 개이면
 $\square$ 가 가장 작은 소인수 3 인 경우와 그 다음
 작은 소인수인 11 이 있다.

92. $2^5 \leq N < 2^6$ 을 만족시키는 자연수 N 을 이진법의
 수로 나타낼 때, 이진법으로 몇 자리의 수가 되는가?
 [배점 6, 상상]

- ① 6 자리 ② 5 자리 ③ 4 자리
 ④ 3 자리 ⑤ 2 자리

해설

$2^5 = 100000_{(2)}$, $2^6 = 1000000_{(2)}$ 이므로
 $100000_{(2)} \leq N < 1000000_{(2)}$
 따라서 N 은 6 자리 수

93. 다음은 골드바흐가 생각해낸 소수에 관한 추측이다.
 골드바흐의 추측을 설명한 것이 아닌 것은?

보기

[골드바흐의 추측]

2 보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼
 수 있다.

[배점 6, 상상]

- ① $12 = 5 + 7$ ② $14 = 3 + 11$
 ③ $16 = 5 + 11$ ④ $18 = 7 + 11$
 ⑤ $20 = 9 + 11$

해설

소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... 이므로 골드바흐의
 추측을 설명한 것이 아닌 것은 $20 = 9 + 11$ 이다.

94. 다음은 골드바흐가 생각해 낸 소수에 관한 추측이다.
골드바흐의 추측을 가장 잘 설명하고 있는 식은?

보기

[골드바흐의 추측]

2 보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다.

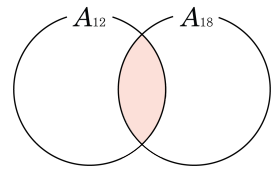
[배점 6, 상상]

- ① $7 = 3 + 4$ ② $12 = 5 + 7$
③ $14 = 5 + 9$ ④ $14 = 2 + 5 + 7$
⑤ $17 = 1 + 5 + 11$

해설

소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... 이므로 골드바흐의 추측을 가장 잘 설명한 것은 $12 = 5 + 7$ 이다.

95. 집합 $A_k = \{x \mid x \text{는 } k \text{의 배수}\}$ 라고 하면 $A_{12} = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 배수}\}$, $A_{18} = \{x \mid x \text{는 } 18 \text{의 배수}\}$ 이다. 다음 중 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합을 A_n 이라고 할 때, n 의 값을 구하여라.



[배점 6, 상상]

▶ 답:

▷ 정답: 36

해설

색칠한 부분은 A_{12} , A_{18} 의 교집합이다.

$A_{12} = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 배수}\} = \{12, 24, 36, \dots\}$,

$A_{18} = \{x \mid x \text{는 } 18 \text{의 배수}\} = \{18, 36, 54, \dots\}$

이므로 $A_{12} \cap A_{18} = \{36, 72, 108, \dots\}$ 이다.

$\{36, 72, 108, \dots\}$ 를 조건제시법으로 나타내면 $\{x \mid x \text{는 } 36 \text{의 배수}\}$ 이므로 n 은 36 이다.

96. 자연수 k 의 모든 배수를 원소로 하는 집합을 A_k 라고 할 때, $(A_6 \cap A_8) \subset A_k$ 인 k 의 최솟값을 구하여라.

[배점 6, 상상]

▶ 답:

▷ 정답: 24

해설

$A_6 \cap A_8$ 는 6 의 배수의 8 의 배수와 교집합이므로 6 과 8 의 공배수이다.

6 과 8 의 공배수는 24 이므로 A_k 는 24 의 배수의 집합이다.

따라서 $A_k = \{24, 48, 72, \dots\}$ 이고 k 의 최솟값은 24 이다.