문제 풀이 과제

1. 연립방정식 $\begin{cases} 2x-y=a \\ 6x-3y=9 \end{cases}$ 의 해가 무수히 많을 때, a 의 값을 구하여라. [배점 2, 하중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 방정식의 미지수의 계수와 상수항이 각각 같을 때 해가 무수히 많다.

따라서 $\begin{cases} 2x-y=a & \cdots ㉠ \\ 6x-3y=9 & \cdots ㉡ \end{cases}$ $3\times ㉠ = 6x-3y = 3a$ 이므로 $3a=9$, $a=3$ 일 때, 해가 무수히 많다.

2. 다음 연립방정식 중 해가 없는 것은? [배점 2, 하중]

① $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-2y=6 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 6x=2y+2 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} x=y+3 \\ 2x-2y=5 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} x+y=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$

해설

두 방정식의 미지수의 계수는 각각 같고 상수항이 다를 때 해가 없다.

따라서 ④ $\begin{cases} x=y+3 \cdots ㉠ \\ 2x-2y=5 \cdots ㉡ \end{cases}$ $2\times ㉠$ 는 ㉡와 상수항만 다르므로 해가 없다.

① 해가 무수히 많다.

② 해가 무수히 많다.

③ 1쌍의 해가 있다.

⑤ 1쌍의 해가 있다.

3. 다음 연립방정식 중 해가 무수히 많은 것은? [배점 2, 하중]

① $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-2y=6 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 4x=2y-2 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+2y=4 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} x=y+2 \\ 3x-3y=4 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} 6x-2y=4 \\ 3x-y=-2 \end{cases}$

해설

두 방정식의 미지수의 계수와 상수항이 각각 같을 때 해가 무수히 많다.

따라서

① $\begin{cases} x-y=3 & \cdots ㉠ \\ 2x-2y=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$ $2\times ㉠ =$ ㉡ 이므로 해가 무수히 많다.

② 해가 없다.

③ 1쌍의 해가 있다.

④ 해가 없다.

⑤ 해가 없다.

4. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$ 의 해가 연립방정식 $\begin{cases} (a+1)x-2y=6 \\ 2x-by=4 \end{cases}$ 를 만족시킬 때 $a+b$ 의 값은? [배점 3, 하상]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$ 를 연립하면 $x=5, y=2$ 가 나온다. $x=5, y=2$ 를 나머지 식에 대입을 하면 $a=1, b=3$ 이 나온다. 따라서 $a+b=4$ 이다.

5. 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=0 \\ bx+ay=3 \end{cases}$ 에서 잘못하여 a, b를 바꾸어 놓고 풀었더니 $x=1$, $y=2$ 가 되었다. 이때, a, b의 값은? [배점 3, 하상]

① $a=2$, $b=-1$ ② $a=1$, $b=-2$

③ $a=-1$, $b=2$ ④ $a=-2$, $b=1$

⑤ $a=-2$, $b=-1$

해설

주어진 식에서 a, b를 바꾸고,

$\begin{cases} bx+ay=0 & \cdots\cdots ① \\ ax+by=3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 에 $x=1$, $y=2$를 대입하여 연립하여 풀면

$-3b=-6$ $\therefore b=2$, $a=-1$

6. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 6x+ay=10 \end{cases}$ 의 해가 존재하지 않을 때, a 의 값은? [배점 3, 하상]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

미지수가 2개인 일차연립방정식

$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'+c'=0 \end{cases}$ 에서 $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$ 이면 해가 없다.

$\dfrac{2}{6}=\dfrac{3}{a}\neq\dfrac{5}{10}$

$\therefore a=9$

7. 연립방정식 $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ ax+4y=a+5 \end{cases}$ 의 해가 $4x-3y=11$ 을 만족할 때, a 의 값을 구하면? [배점 3, 중하]

① -5 ② -1 ③ 2 ④ 6 ⑤ 9

해설

주어진 식에서 $\begin{cases} 3x+2y=4\cdots ㉠ \\ 4x-3y=11\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 연립하여 풀면,

㉠ $\times 3+$ ㉡ $\times 2$ 를 계산하면 $x=2$, $y=-1$ 이고

이것을 다른 한 식에 대입하면

$2a-4=a+5$

$\therefore a=9$

8. 다음 두 연립방정식의 해가 같을 때, ab 의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} -x+2y=-2x-3 \\ ax-2y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+2y=-6 \\ -2x+3by=-10 \end{cases}$$

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{52}{27}$

해설

$x+2y=-3 \cdots$ ㉠

$3x+2y=-6 \cdots$ ㉡

㉡ − ㉠ 을 하면

$2x=-3$

$\therefore\ x=-\frac{3}{2}$

x 값을 ㉠에 대입 :

$-\frac{3}{2}+2y=-3$

$2y=-\frac{3}{2}$

$\therefore\ y=-\frac{3}{4}$

$x,\ y$ 값을 식에 대입하면

$a\times\left(-\frac{3}{2}\right)-2\times\left(-\frac{3}{4}\right)=1$

$-\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}=1$

$-\frac{3}{2}a=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}$

$-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)+3b\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-10$

$3-\frac{9b}{4}=-10$

$-\frac{9b}{4}=-13$

$9b=52$

$\therefore\ b=\frac{52}{9}$

$\therefore\ ab=\frac{1}{3}\times\frac{52}{9}=\frac{52}{27}$

9. 다음 중 해가 2 개 이상인 연립방정식은?

[배점 3, 중하]

① $\begin{cases} 5x+2y=11 \\ -\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}y=3 \end{cases}$

② $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x+3y=4 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 0.2x+0.3y=0.4 \\ \frac{1}{6}x+\frac{1}{4}y=\frac{1}{3} \end{cases}$

④ $\begin{cases} x=y+3 \\ 2x-2y=5 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} 3x-y=-1 \\ 9x-3y=3 \end{cases}$

해설

해가 2 개 이상이라는 것은 연립방정식의 해가 무수히 많다는 것과 같다.

두 방정식의 미지수의 계수와 상수항이 각각 같을 때, 해가 무수히 많다.

따라서

① $\begin{cases} 5x+2y=11 & \cdots ㉠ \\ -\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}y=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠ 과 $-10\times$ ㉡ 은 상수항만 다르므로 해가 없다.

② $\begin{cases} x+y=2 & \cdots ㉠ \\ 3x+3y=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

$3\times$ ㉠ 과 ㉡은 상수항만 다르므로 해가 없다.

③ $\begin{cases} 0.2x+0.3y=0.4 & \cdots ㉠ \\ \frac{1}{6}x+\frac{1}{4}y=\frac{1}{3} & \cdots ㉡ \end{cases}$

$10\times$ ㉠ $=12\times$ ㉡ 이므로 해가 무수히 많다.

④ 해가 없다.

⑤ 해가 없다.

10. 다음 네 일차방정식의 그래프가 한 점에서 만날 때, 상수 a, b 에 관하여 $a^2 - b^2$ 의 값은?

$6x - 5y = -4, ax - by = 7, 2x + 5y = 12, 2ax + by = 2$

[배점 4, 중중]

▶ 답 :
▷ 정답 : 5

해설

$\begin{cases} 6x - 5y = -4 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$ 를 연립하여 풀면 $x = 1,\ y = 2$ 이 나오고, 이 값을 나머지 두 식에 대입하여 풀면 $a = 3,\ b = -2$ 가 나온다. 따라서 $a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$ 이다.

11. $x,\ y$ 에 관한 연립방정식 (가), (나)의 해가 같을 때 $a,\ b$ 의 값은?

(가) $\begin{cases} 6x - y = 4 \\ -2ax + by = 10 \end{cases}$ (나)

$\begin{cases} 7x - 2y = 3 \\ bx - (3 + a)y = 1 \end{cases}$

[배점 4, 중중]

① $a = 1,\ b = 2$ ② $a = -2,\ b = 3$ ③ $a = 3,\ b == -2$ ④ $a = 2,\ b = 1$ ⑤ $a = -3,\ b = 2$

해설

$6x - y = 4,\ 7x - 2y = 3$ 을 연립하여 풀면 $x = 1,\ y = 2$ 가 나온다. 따라서 이를 나머지 두 식에 대입하여 풀면 $a = -2,\ b = 3$ 이 나온다.

12. 연립방정식 $\begin{cases} (a-1)x + y = 2 \\ 2ax + y = a - 1 \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 상수 a 의 값은?

[배점 4, 중중]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면 $\{(a-1) - 2a\}x = 2 - (a-1)$ 이 되는데 이 식이 $0 \cdot x = k\ (k \neq 0)$ 꼴이 되어야 연립방정식의 해가 없으므로 $-a - 1 = 0$, $a = -1$ 이다.

13. 연립방정식 $\begin{cases} ax + by = -5 \\ 5x + cy = 7 \end{cases}$ 을 푸는데 c 를 잘못 보아 $x = 0,\ y = 1$ 을 해로 얻었다. 옳은 해가 $x = 3,\ y = 4$ 일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

[배점 5, 중상]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\begin{cases} ax + by = -5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x + cy = 7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 에서 옳은 해가 $x = 3,\ y = 4$ 이므로

$3a + 4b = -5 \cdots\cdots ㉢$

㉡에 대입을 하면 $c = -2$ 이고, ㉠은 $x = 0,\ y = 1$ 도 만족하므로 $a \cdot 0 + b \cdot 1 = -5$ 에서 $b = -5$ 이다. 이것을 ㉢에 대입해서 성립해야 하므로 $a = 5$ 가 나온다.

$\therefore\ a + b + c = 5 + (-5) + (-2) = -2$

14. 연립방정식 $\begin{cases} 4x-3y+2=0 \\ ax-6y+b=0 \end{cases}$ 의 해가 없고 $ax-4y+b=0$ 의 그래프가 점 $(2,\ 3)$을 지날 때, $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하면? [배점 5, 중상]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

연립방정식의 해가 없으므로 첫 번째 식에 $\times 2$ 를 해 주고 두 번째 식을 뺀 값이 $0 \cdot x = k\ (k \neq 0)$ 이 되어야 하므로 $8-a=0$, $4-b \neq 0$ 이다. 또한 $8x-4y+b=0$ 의 그래프가 점 $(2,\ 3)$ 을 지나므로 $16-12+b=0,\ b=-4$ 이다. 따라서 $\frac{a}{b}=\frac{8}{-4}=-2$ 이다.

15. 두 직선 $(a-3)x-y=0, (1-2a)x+3y=3$ 이 평행하기 위한 상수 a 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

연립방정식 $(a-3)x-y=0, (1-2a)x+3y=3$ 의 해가 없어야 하므로

$\frac{a-3}{1-2a}=\frac{-1}{3} \neq 0$

$2a-1=3a-9$

$\therefore a=8$

16. 집합 $A=\{(x,y) \mid 5x-2y=8\}$, $B=\{(x,y) \mid y=ax+b\}$ 에 대하여

두 집합의 해가 무수히 많을 때, $a+b$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{3}{2}$

해설

$\begin{cases} 5x-2y=8 \\ y=ax+b \end{cases}$ 의 해가 무수히 많으므로

$5x-2y=8, ax-y=-b$ 에서 $\frac{5}{a}=\frac{2}{1}=\frac{8}{-b}$

$\frac{5}{a}=\frac{2}{1}$ 이므로 $2a=5 \therefore a=\frac{5}{2}$

$\frac{2}{1}=\frac{8}{-b}$ 에서 $-2b=8 \therefore b=-4$

$\therefore a+b=\frac{5}{2}-4=-\frac{3}{2}$

17. x, y 에 관한 연립방정식 $\begin{cases} px+qy+r=0 \\ qx+ry+p=0 \end{cases}$ 의 해가 무수히 많을 때, $x+y$ 의 값을 구하여라.
(단, p, q, r은 0 이 아닌 실수) [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

주어진 연립방정식의 해가 무수히 많으므로 $\frac{p}{q}=\frac{q}{r}=\frac{r}{p}$ 이므로
$\frac{p}{q}=\frac{q}{r}=\frac{r}{p}=k$ 로 놓으면 $p=qk, q=rk, r=pk$
세 식의 좌변끼리, 우변끼리 각각 곱하면

$$pqr=pqrk^3(pqr\neq 0)$$
$$k^3=1 \therefore k=1$$

따라서 $p=q=r$ 이므로 주어진 연립방정식은 모두 $p(x+y+1)=0$ 이 된다.
$p\neq 0$ 이므로 $x+y+1=0$
$\therefore x+y=-1$

18. 연립방정식 $\begin{cases} mx=\frac{1}{2}y \\ 3x+2y=mx \end{cases}$ 가 $x=0, y=0$ 이외의 해를 가질 때,
상수 m 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

두 직선 $mx-\frac{1}{2}y=0$, $(3-m)x+2y=0$ 의 해가 무수히 많으므로
$\frac{m}{3-m}=\frac{-\frac{1}{2}}{2}$
$-4m=3-m$
$\therefore m=-1$