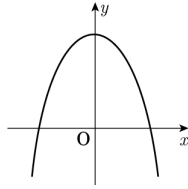
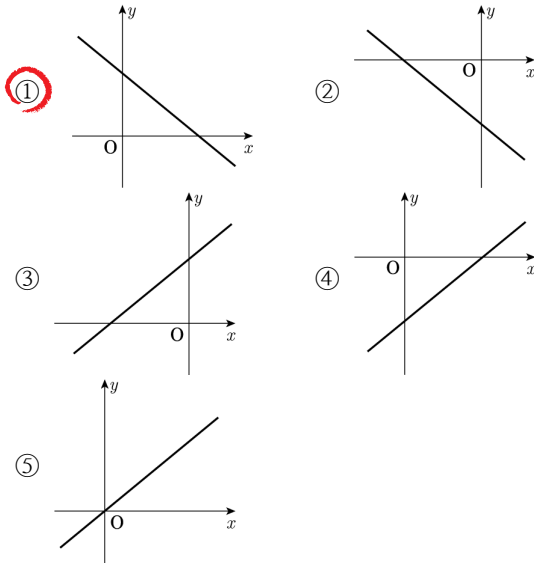


약점 보강 1

1. 이차함수 $y = ax^2 + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프는?



[배점 3, 하상]



해설

이차함수 $y = ax^2 + b$ 가 위로 볼록이므로 $a < 0$ 이고, 꼭짓점이 y 절편이 양수이므로 $b > 0$ 이다. 따라서 $y = ax + b$ 의 그래프는 기울기가 음수이고 y 절편이 양수인 그래프이다.

2. 이차함수 $y = a(x + p)^2 + q$ 의 그래프에서 다음 $\square$ 안에 알맞은 부등호를 써 넣어라.

$$a + p - q \square 0$$

[배점 3, 하상]

해설

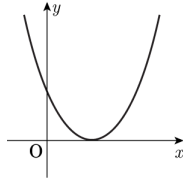
이차함수 $y = a(x + p)^2 + q$ 의 꼭짓점은 $(-p, q)$ 이다.

그래프가 아래로 볼록하므로 $a > 0$ 이다.

또한, 꼭짓점 $(-p, q)$ 가 제3 사분면에 있으므로 $-p < 0, p > 0, q < 0$ 이다.

따라서 $a + p - q > 0$ 이다.

3. 이차함수 $y = a(x-p)^2$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, a, p 의 부호는?



[배점 3, 하상]

- ① $a > 0, p > 0$ ② $a > 0, p < 0$
 ③ $a < 0, p = 0$ ④ $a < 0, p < 0$
 ⑤ $a < 0, p > 0$

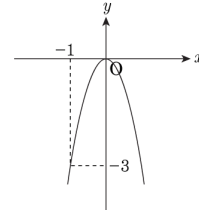
해설

이차함수 그래프의 모양이 아래로 볼록이므로 $a > 0$ 이다.

또한, 꼭짓점의 좌표는 $(p, 0)$ 이고 x 축의 오른쪽에 있으므로 $p > 0$ 이다.

따라서 $a > 0, p > 0$ 이다.

4. 다음 그림과 같은 그래프가 나타내는 이차함수의 식은?



[배점 3, 하상]

- ① $y = -3x^2$ ② $y = -x^2$
 ③ $y = 3x^2$ ④ $y = \frac{1}{3}x^2$
 ⑤ $y = -\frac{1}{3}x^2$

해설

$y = ax^2$ 에서 $(-1, -3)$ 을 지나므로 $-3 = a \times (-1)^2, a = -3$
 $\therefore y = -3x^2$

5. 이차함수 $y = -x^2$ 의 그래프에 대한 설명이다. 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

- ㉠ 그래프의 모양은 위로 볼록하다.
 ㉡ 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$ 이다.
 ㉢ x 축에 대칭인 그래프이다.
 ㉣ x 의 값이 증가할 때, $x > 0$ 인 범위에서 y 의 값은 증가한다.
 ㉤ 치역은 $\{y \mid y \leq 0\}$ 이다.
 ㉥ 점 $(3, -9)$ 을 지난다.

[배점 3, 중하]

- ▶ 답 :
 ▶ 답 :
 ▶ 답 :
 ▶ 답 :

- ▶ 정답 : ㉠
 ▶ 정답 : ㉡
 ▶ 정답 : ㉢
 ▶ 정답 : ㉤

해설

$y = -x^2$ 은 위로 볼록한 포물선이고 원점 $(0, 0)$ 을 꼭짓점으로 한다. y 축에 대칭이므로 축의 방정식이 $x = 0$ 이다. $y = x^2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이고 $x < 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하고 $x > 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다. 치역은 $\{y \mid y \leq 0\}$ 이고 점 $(3, -9)$ 를 지난다.

6. 이차함수 $y = -\frac{1}{2}(x+3)^2$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은? [배점 3, 중하]

- ㉠ 꼭짓점의 좌표는 $(-3, 0)$ 이다.
 ㉡ $y = -\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.
 ㉢ 축의 방정식은 $x = -3$ 이다.
 ㉣ 점 $(1, -8)$ 을 지난다.
 ㉤ $x > -3$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

해설

$y = -\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.

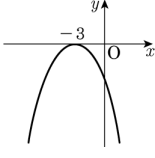
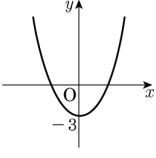
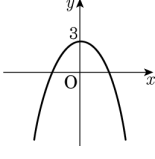
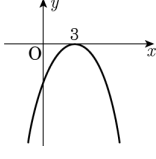
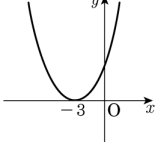
7. 이차함수 $y = -2(x + 1)^2$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것은? [배점 3, 중하]

- ① $y = -2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.
- ② y 축에 대하여 대칭이다.
- ③ 꼭짓점의 좌표는 (1, 0) 이다.
- ④ 최솟값 0 을 갖는다.
- ⑤ $x > -1$ 일 때, x 의 값이 증가함에 따라 y 의 값은 감소한다.

해설

- ① $y = -2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프이다.
- ② $x = -1$ 에 대하여 대칭이다.
- ③ 꼭짓점의 좌표는 (-1, 0) 이다.
- ④ 최댓값 0 을 갖는다.

8. 다음 중 $y = -\frac{2}{3}(x - 3)^2$ 의 그래프는? [배점 3, 중하]

- ① 
- ② 
- ③ 
- ④ 
- ⑤ 

해설

x^2 의 계수 $-\frac{2}{3}$ 는 음수이므로 위로 볼록, 꼭짓점의 좌표는 (3, 0) 이다.

9. 이차함수 $y = x^2$ 에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?
[배점 3, 중하]

- ① 그래프는 원점을 지나고 아래로 볼록한 포물선이다.
- ② x 가 어떤 값을 갖더라도 y 의 값은 양수 또는 0이다.
- ③ x 축에 대하여 대칭이다.
- ④ $x > 0$ 일 때, x 값이 증가하면, y 값도 증가한다.
- ⑤ $x < 0$ 일 때, x 값이 증가하면, y 값은 감소한다.

해설

③ y 축에 대하여 대칭이다.

10. 이차함수 $y = 3x^2 - 12x + 1$ 와 $y = 2x^2 + px + q$ 와 꼭짓점이 일치할 때, $p - q$ 의 값을 구하여라.
[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : -5

해설

$y = 3x^2 - 12x + 1$
 $= 3(x^2 - 4x + 4 - 4) + 1$
 $= 3(x - 2)^2 - 11$
 이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2, -11)$ 이고,
 $y = 2x^2 + px + q$ 와 꼭짓점이 일치하므로
 $y = 2(x - 2)^2 - 11$
 $= 2x^2 - 8x - 3$
 이므로 $p = -8, q = -3$ 이다.
 $\therefore p - q = -5$

11. 이차함수 $y = 3x^2 - 12x + 1$ 와 $y = 2x^2 + px + q$ 와 꼭짓점이 일치할 때, $p - q$ 의 값을 구하여라.
[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : -5

해설

$y = 3x^2 - 12x + 1$
 $= 3(x^2 - 4x + 4 - 4) + 1$
 $= 3(x - 2)^2 - 11$
 이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2, -11)$ 이고,
 $y = 2x^2 + px + q$ 와 꼭짓점이 일치하므로
 $y = 2(x - 2)^2 - 11$
 $= 2x^2 - 8x - 3$
 이므로 $p = -8, q = -3$ 이다.
 $\therefore p - q = -5$

12. 이차함수 $y = -3x^2 + 18x$ 을 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 꼴로 나타낼 때, 상수 a, p, q 의 합 $a + p + q$ 의 값은?
[배점 4, 중중]

- ① 17 ② 19 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

해설

$y = -3(x^2 - 6x + 9 - 9) = -3(x - 3)^2 + 27$
 $a = -3, p = 3, q = 27$
 $a + p + q = 27$ 이다.

13. 다음 중 주어진 조건을 모두 만족하는 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식은?

보기

- ㄱ. 이차함수 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프와 폭이 같다.
 ㄴ. 꼭짓점은 제 4 사분면 위에 있다.
 ㄷ. 아래로 볼록하다.
 ㄹ. y 절편이 양수이다.

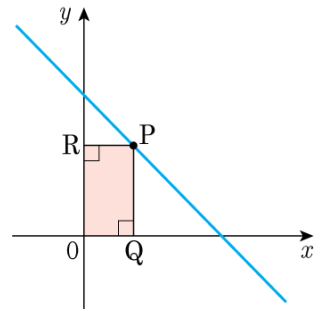
[배점 4, 중중]

- ① $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1$
 ② $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 + 1$
 ③ $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 3$
 ④ $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$
 ⑤ $y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 - 3$

해설

ㄱ에서 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프와 폭이 같은 것은 이차항의 계수가 $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 이다.
 ㄴ. 꼭짓점의 x 좌표가 양수, y 좌표가 음수이다.
 ㄷ. 아래로 볼록하므로 이차항의 계수가 양수이다.
 ㄹ. y 절편이 양수이다.
 이 조건을 만족하는 이차함수식은 ①이다.

14. 직선 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ 위를 움직이는 한 점 P가 있다. 점 P에서 x 축, y 축 위에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라고 할 때, 직사각형 OQPR의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P는 제 1 사분면 위에 있다.)



[배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: $\frac{3}{2}$

해설

직선의 방정식은 $y = -\frac{3}{2}x + 3$ 이므로

점 P의 좌표를 (a, b) 로 놓으면 $b = -\frac{3}{2}a + 3$

$$\begin{aligned} \square OQPR &= ab = a \left(-\frac{3}{2}a + 3 \right) \\ &= -\frac{3}{2}a^2 + 3a \\ &= -\frac{3}{2}(a-1)^2 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

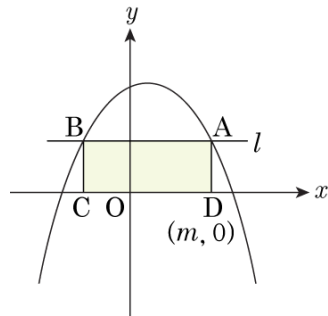
한편, 점 P는 제 1 사분면 위의 점이므로

$$a > 0, b = -\frac{3}{2}a + 3 > 0 \quad \therefore 0 < a < 2$$

따라서 $\square OQPR$ 의 넓이는 $a = 1$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

15. $y = -x^2 + x + 6$ 의

그래프와 x 축에 평행
인 직선 l 이 만나는 두
점 A, B 에서 x 축에
수선을 그어 그 수선의
발을 각각 D, C 라 하
고, 점D 의 x 좌표를 m
이라고 할 때, $\square ABCD$



의 둘레의 길이의 최댓값은? ($\frac{1}{2} < m < 3$)

[배점 5, 중상]

- ① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{31}{4}$ ③ 10 ④ $\frac{49}{4}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

해설

$y = -x^2 + x + 6 = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{25}{4}$ 의 점 A 의
좌표는 $(m, -m^2 + m + 6)$ 이다.

직사각형의 가로 길이는 $2(m - \frac{1}{2})$ 이고,

직사각형의 세로 길이는 $-m^2 + m + 6$

($\square ABCD$ 둘레의 길이) $= 2\{2(m - \frac{1}{2}) - m^2 + m + 6\}$

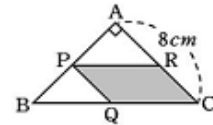
$$= 2(2m - 1 - m^2 + m + 6)$$

$$= 2(-m^2 + 3m + 5)$$

$$= -2(m - \frac{3}{2})^2 + \frac{29}{2}$$

$m = \frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{29}{2}$ 이다.

16. 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형 ABC 의 $\overline{AB}$ 위
에 점 P 를 잡고, 점 P 에서 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ 와 평행한 직선
을 그어 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ 와 만나는 점을 각각 Q, R 라 한다.
 $\square PQCR$ 의 넓이가 최대가 될 때, $\overline{BP}$ 의 길이를 구하
면?



[배점 5, 중상]

- ① 1cm ② 2cm ③ 3cm

- ④ 4cm ⑤ 5cm

해설

$\overline{BP} = x$ 라 놓으면

$$\square PQCR = \triangle ABC - (\triangle APR + \triangle PBQ)$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 8 - \left\{ \frac{1}{2} \times (8 - x)^2 + \frac{1}{2} x^2 \right\} = 32 -$$

$$(x^2 - 8x + 32) = -x^2 + 8x = -(x - 4)^2 + 16$$

따라서 $\overline{BP} = 4\text{cm}$ 일 때, $\square PQCR$ 의 넓이가 최
대가 된다.

17. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점을 각각 A(1, 0), B(-7, 0)이라고 할 때, 두 점 A, B 와 y 절편으로 이루어지는 삼각형의 넓이는 28 이다. 두 점 A, B 와 꼭짓점으로 이루어지는 삼각형의 넓이를 구하여라. (단, $a > 0$) [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

y 절편의 절댓값을 m 이라고 하면

$$\frac{1}{2} \times (1 + 7) \times m = 28 \quad \therefore m = 7$$

$a > 0$ 이고, x 절편이 -7, 1 이므로 y 절편은 음수 이다. $y = a(x + 7)(x - 1)$ 의 그래프가 (0, -7) 을 지나므로

$$-7 = -7a \quad \therefore a = 1$$

$$y = (x + 7)(x - 1)$$

$$= x^2 + 6x - 7$$

$$= (x + 3)^2 - 16$$

따라서 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 8 \times 16 = 64$ 이다.

18. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 - q$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점 사이의 거리가 정수가 되게 하는 30 보다 작은 자연수 q 의 값을 모두 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 8

▷ 정답 : 18

해설

$y = \frac{1}{2}x^2 - q$ 와 x 축과의 교점을 A, B 라 하고, x 좌표를 구하면 $\frac{1}{2}x^2 - q = 0$ 에서

$$x = \pm\sqrt{2q}$$

따라서 x 축과의 교점은 A($-\sqrt{2q}$, 0), B($\sqrt{2q}$, 0)

즉, $\overline{AB} = 2\sqrt{2q}$ 이고 q 는 자연수이므로 $\sqrt{2q}$ 가 정수가 되면 된다.

$\therefore q = 2, 8, 18$

19. 이차함수 $y = \frac{4}{3}x^2$ 의 그래프와 직선 $y = 48$ 사이에 둘러싸인 도형 내부의 좌표 중, x, y 좌표의 값이 모두 자연수인 점의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 169 개

해설

$y = \frac{4}{3}x^2$ 의 그래프와 직선 $y = 48$ 이 만나는 두 점은 각각 $(-6, 48), (6, 48)$

둘러싸인 부분의 x 좌표의 범위는 $-6 \leq x \leq 6$ 이므로

이 범위 안의 자연수는 1, 2, ..., 6 의 6개가 있다.

(1) $y = 16$ 위에 있는 자연수인 점은 $(1, 16), (2, 16), \dots, (6, 16)$ 로 6 개가 있다.

(2) $y = \frac{4}{3}x^2$ 의 그래프 위에 있는 자연수인 점은 $(3, 12), (6, 48)$ 의 2 개가 있다.

따라서

x 좌표가 6 일 때 : 1 개

x 좌표가 5 일 때 : y 좌표는 34 부터 48 까지이므로 15 개

x 좌표가 4 일 때 : y 좌표는 22 부터 48 까지이므로 27 개

x 좌표가 3 일 때 : y 좌표는 12 부터 48 까지이므로 37 개

x 좌표가 2 일 때 : y 좌표는 6 부터 48 까지이므로 43 개

x 좌표가 1 일 때 : y 좌표는 2 부터 48 까지이므로 47 개

$\therefore 15 + 27 + 37 + 43 + 47 = 169$ (개)

20. 일차함수 $y = 2x + 3$ 의 치역이 $\{y | -3 \leq y \leq 5\}$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 : 26

▷ 정답 : 최솟값 : $\frac{9}{5}$

해설

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x^2 + (2x + 3)^2 \\ &= 5x^2 + 12x + 9 \\ &= 5\left(x + \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{9}{5} \end{aligned}$$

$-3 \leq y \leq 5$ 에서 $-3 \leq 2x + 3 \leq 5$
 $\therefore -3 \leq x \leq 1$

따라서

$x = -\frac{6}{5}$ 일 때, 최솟값이 $\frac{9}{5}$ 이고,
 $x = 1$ 일 때, 최댓값이 26 이다.

21. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르시오.
[배점 5, 상하]

① $-\frac{c}{a} < 0$

② $a - b + c > 0$

③ $b^2 - 4ac > 0$

④ $0 < x_1 < x_2$ 일 때, $f(x_1) < f(x_2)$

⑤ $abc < 0$

해설

① $a > 0, c < 0$ 이므로 $-\frac{c}{a} > 0$

② $f(-1) = a - b + c < 0$

③ x 축과의 교점이 두 개이므로 $D = b^2 - 4ac > 0$

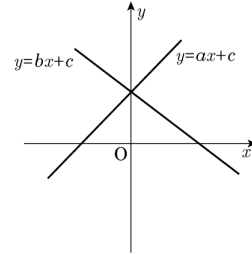
④ 「 $x > 0$ 」인 구간에서 x 값이 증가하면 y 값은 증가하는 그래프이므로

$0 < x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$

⑤ $a > 0, b > 0, c < 0$ 이므로 $abc < 0$

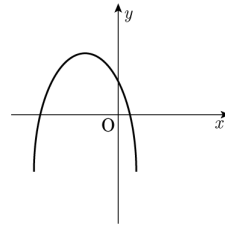
따라서 옳지 않은 것은 ①, ②이다.

22. 두 일차함수 $y = ax + c, y = bx + c$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 이차함수 $y = ax^2 - bx - c$ 의 그래프로 적당한 것을 고르시오.

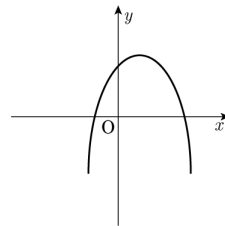


[배점 5, 상하]

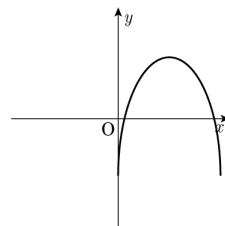
①



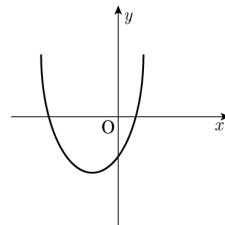
②



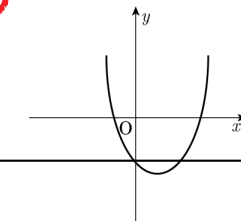
③



④



⑤



23. 이차함수 $y = 3x^2 + 6kx + 4k^2 - 3k - 18$ 의 그래프의 꼭짓점이 제 4 사분면 위에 있을 때, k 의 값의 범위를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3 < k < 0$

▷ 정답 : $0 > k > -3$

해설

$$y = 3x^2 + 6kx + 4k^2 - 3k - 18$$

$$= 3(x + k)^2 - 3k^2 + 4k^2 - 3k - 18$$

$$= 3(x + k)^2 + k^2 - 3k - 18$$

꼭짓점은 $(-k, k^2 - 3k - 18)$

이때, 꼭짓점이 제 4 사분면 위에 있으므로

$$-k > 0 \quad \therefore k < 0$$

$$k^2 - 3k - 18 < 0$$

$$(k + 3)(k - 6) < 0$$

$$\therefore -3 < k < 6$$

따라서 $-3 < k < 0$ 이다.

24. 정의역이 $\{x | 0 \leq x \leq 3\}$ 일 때, 함수 $y = -(2x^2 - 4x - 3)^2 - 5(2x^2 - 4x + 1) + 11$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $\frac{m}{M}$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$2x^2 - 4x = t$ 라고 치환하면 $0 \leq x \leq 3$ 에서

$t = 2(x - 1)^2 - 2$ 이므로

$$\therefore 0 \leq t \leq 6$$

$$y = -(2x^2 - 4x - 3)^2 - 5(2x^2 - 4x + 1) + 11$$

$$= -(t - 3)^2 - 5(t + 1) + 11$$

$$= -(t - \frac{1}{2})^2 - \frac{11}{4}$$

$t = \frac{1}{2}$ 일 때, 최댓값(M) 이 $-\frac{11}{4}$

$t = 6$ 일 때, 최솟값(m) 이 -33

따라서 구하는 값은 $\frac{-33}{-\frac{11}{4}} = 12$ 이다.