

# 문제 풀이 과제

1. 축의 방정식이  $x = -1$  이고 두 점  $(-1, 6)$ ,  $(1, 2)$  를 지나는 포물선의 식을  $y = ax^2 + bx + c$  의 꼴로 나타낼 때,  $abc$  의 값을 구하면? [배점 2, 하중]

- ① 5    ② 7    ③ 10    ④ 12    ⑤ 15

### 해설

축의 방정식이  $x = -1$  이므로  
 $y = a(x + 1)^2 + q$   
 점  $(-1, 6)$ 과 점  $(1, 2)$ 를 지나므로  
 $6 = q, 2 = 4a + q$   
 $\therefore a = -1, q = 6$   
 $\therefore y = -(x + 1)^2 + 6$   
 따라서  $y = -x^2 - 2x + 5$   
 $\therefore a = -1, b = -2, c = 5$   
 $\therefore abc = 10$

2. 이차함수  $y = -x^2 + 4x - 3$  의 최댓값을  $m$ , 이차함수  $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3$  의 최솟값을  $n$  이라고 할 때,  $mn$  의 값을 구하여라. [배점 2, 하중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

### 해설

$y = -x^2 + 4x - 3 = -(x - 2)^2 + 1$   
 최댓값  $m = 1$   
 $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3 = \frac{1}{3}(x + 3)^2$   
 최솟값  $n = 0$   
 $\therefore mn = 1 \times 0 = 0$

3. 다음 포물선을 폭이 좁은 것부터 차례로 쓴 것을 고르면?

- |                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| ㉠ $y = x^2$            | ㉡ $y = 4x^2$           |
| ㉢ $y = \frac{3}{2}x^2$ | ㉣ $y = \frac{1}{4}x^2$ |

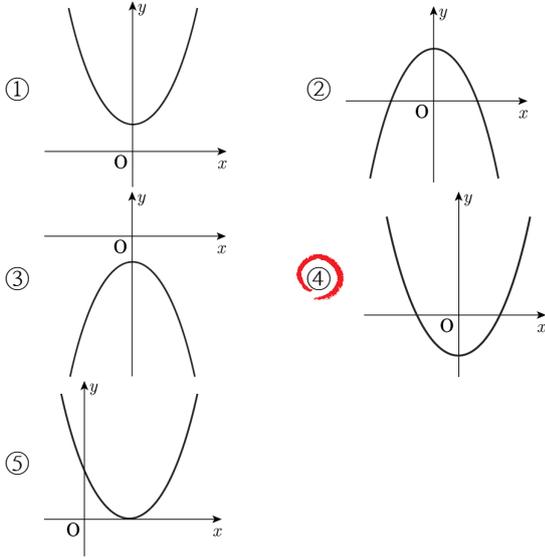
[배점 3, 하상]

- ① ㉠-㉡-㉢-㉣    ② ㉡-㉣-㉠-㉢  
 ③ ㉢-㉣-㉠-㉣    ④ ㉣-㉠-㉣-㉡  
 ⑤ ㉣-㉡-㉢-㉠

### 해설

이차항의 계수의 절댓값이 클수록 포물선의 폭은 좁아진다.

4.  $a < 0, q < 0$  일 때, 이차함수  $y = -ax^2 + q$  의 그래프로 알맞은 것은? [배점 3, 하상]



**해설**

이차함수의 그래프  $y = -ax^2 + q$  에서  $a < 0$  이므로  $-a > 0$  이다.  
따라서 아래로 볼록이다.  
또한, 이차함수  $y = -ax^2 + q$  꼴의 그래프는 대칭축이  $x = 0$  이다.  
 $q < 0$  이므로  $y$  축 아래에 꼭짓점이 존재한다.  
따라서 답은 ④번이다.

5. 이차함수  $y = x^2 + 4x - m$  의 최솟값이 4 일 때, 상수  $m$  의 값을 고르면? [배점 3, 중하]

- ① -10      ② -8      ③ -4  
④ 0      ⑤ 2

**해설**

$$y = (x + 2)^2 - 4 - m \text{ 에서 } -4 - m = 4 \quad \therefore m = -8$$

6. 이차함수  $y = -\frac{1}{2}x^2$  의 그래프를  $x$  축의 방향으로  $-2$  만큼 평행이동하면 점  $(-4, k)$  를 지난다. 이 때,  $k$  의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: -2

**해설**

$y = ax^2$  의 그래프를  $x$  축으로  $p$  만큼 평행이동하면  $y = a(x - p)^2$  이므로  $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2$  이고,  $x$  의 값이  $-4$  이므로 대입하면  $y = -2$  이다. 따라서  $k = -2$  이다.

7. 원점을 꼭짓점으로 하고 점  $(1, -3)$  을 지나는 이차함수의 그래프가 제 3 사분면 위의 점  $(a, -27)$  과 제 4 사분면 위의 점  $(b, -27)$  을 지날 때,  $b-a$  의 값은?  
[배점 4, 중중]

- ①  $-3$     ②  $3$     ③  $0$     ④  $6$     ⑤  $-6$

**해설**

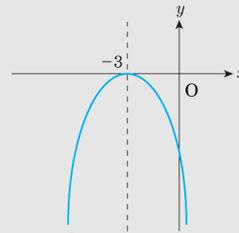
원점을 꼭짓점으로 하는 이차함수의 식은  $y = ax^2$  이고, 점  $(1, -3)$  을 지나므로  
 $-3 = a \times (1)^2$ ,  $a = -3 \therefore y = -3x^2$   
 점  $(m, -27)$  를 지나므로  $-27 = -3 \times m^2$ ,  $m^2 = 9 \therefore m = \pm 3$   
 제 3 사분면 위의 점은  $(x \text{ 좌표}) < 0$  이고, 제 4 사분면 위의 점은  $(x \text{ 좌표}) > 0$  이므로  
 $a = -3$ ,  $b = 3$   
 따라서  $b - a = 3 - (-3) = 6$  이다.

8. 이차함수  $y = -2(x + 3)^2$  의 그래프에서  $x$  의 값이 증가함에 따라  $y$  의 값이 감소하는  $x$  의 값의 범위는?  
[배점 4, 중중]

- ①  $x > 0$     ②  $x > 3$     ③  $x < -3$   
 ④  $x < 3$     ⑤  $x > -3$

**해설**

$y = -2(x + 3)^2$  의 그래프는 다음과 같다.



즉, 위로 볼록이고, 대칭축은  $x = -3$  이다.  $x > -3$  에서  $x$  가 증가하면  $y$  는 감소한다.

9. 포물선  $f(x) = ax^2 + bx + 4$  는 점  $(-1, 4)$  를 지나고,  $g(x) = mx^2 + nx + p$  는 점  $(-5, -2)$  를 지난다. 두 포물선이  $y$  축에 대하여 대칭일 때, 포물선  $g(x)$  의 꼭짓점의 좌표를 구하면? [배점 5, 중상]

- ①  $(\frac{1}{2}, \frac{61}{16})$     ②  $(\frac{1}{2}, \frac{31}{8})$     ③  $(\frac{1}{2}, \frac{63}{16})$   
 ④  $(\frac{1}{2}, 4)$     ⑤  $(\frac{1}{2}, \frac{163}{40})$

**해설**

두 포물선  $f(x)$ ,  $g(x)$  가  $y$  축에 대하여 대칭이므로  $f(x)$  는 점  $(-1, 4)$  와 점  $(-5, -2)$  를 지난다.  $f(x) = ax^2 + bx + 4$  에 두 점  $(-1, 4)$ ,  $(-5, -2)$  를 대입하면  $a - b + 4 = 4$  이므로  $a = b$  이다.

$$25a - 5b + 4 = -2$$

$$20a = -6$$

$$a = b = -\frac{3}{10}$$

$$f(x) = -\frac{3}{10}x^2 - \frac{3}{10}x + 4 = -\frac{3}{10}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{163}{40}$$

따라서  $f(x)$  의 꼭짓점의 좌표가  $(-\frac{1}{2}, \frac{163}{40})$  이므로  $g(x)$  의 꼭짓점의 좌표는  $(\frac{1}{2}, \frac{163}{40})$  이다.

10. 이차함수  $y = ax^2 + 4x + q$  를  $y = -\frac{1}{3}(x - p)^2 + 10$  으로 나타낼 수 있고 꼭짓점이  $(p, 10)$  이다. 상수  $a, p, q$  의 곱  $apq$  의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 4

**해설**

$$y = -\frac{1}{3}(x^2 - 2px + p^2) + 10 = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2px}{3} - \frac{1}{3}p^2 + 10 \text{ 이므로}$$

$$a = -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}p = 4, p = 6 \text{ 이고 } q = -\frac{1}{3}p^2 + 10 = -\frac{1}{3}(36) + 10 = -2 \text{ 이다. 따라서 } apq = -\frac{1}{3} \times 6 \times (-2) = 4 \text{ 이다.}$$

11. 이차함수  $f(x) = x^2 - 1$  에 대하여  $f^1(x) = f(x)$ ,  $f^{n+1} = f(f^n(x))$  라 할 때,  $f^{2009}(-1)$  의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 0

**해설**

$$f^1(-1) = 0$$

$$f^2(-1) = -1$$

$$f^3(-1) = 0$$

$$f^4(-1) = -1$$

⋮

$$\therefore f^{2009}(-1) = 0$$

12. 가을 전어철을 맞아 전어의 어획량은 매일 현재 어획량의 10% 씩 늘어나고, 마리당 판매 가격은 매일 현재 가격의 5% 씩 줄어들고 있다. 며칠 후에 전어를 한꺼번에 팔아야 최대의 수입을 얻을 수 있는지 구하여라.  
[배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 5일 후

해설

현재의 전어의 양과 가격을 각각  $m$ 마리,  $p$ 원 라고 할 때,  $x$  일 후의 전어의 양과 가격은 각각  $m\left(1 + \frac{1}{10}x\right)$ 마리,  $p\left(1 - \frac{1}{20}x\right)$  원 이다. 이때,  $x$  일 후의 수입을  $y$  원이라고 하면

$$y = mp\left(1 + \frac{1}{10}x\right)\left(1 - \frac{1}{20}x\right)$$

$$= mp\left(1 + \frac{1}{20}x - \frac{1}{200}x^2\right)$$

$$= -\frac{mp}{200}(x^2 - 10x - 200)$$

$$= -\frac{mp}{200}(x - 5)^2 + \frac{9}{8}mp$$

따라서  $x = 5$  일 때,  $y$  는 최댓값을 가지므로 5 일 후에 팔면 최대의 수입을 얻을 수 있다.

13.  $0 \leq \frac{p}{2} \leq 1$ ,  $2p - q \leq 3$  를 만족하는 실수  $p, q$  에 대하여 이차함수  $y = -x^2 + px + q$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) 의 최댓값을  $M$  이라 할 때,  $M$  의 최솟값을 구하여라.  
[배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: -7

해설

$$y = -x^2 + px + q = -\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + q + \frac{p^2}{4}$$

이때,  $0 \leq \frac{p}{2} \leq 1$  이고  $0 \leq x \leq 1$  이므로 최댓값  $M$  은  $x = \frac{p}{2}$  일 때이다.

$$\therefore M = q + \frac{p^2}{4}$$

또한  $2p - q \leq 3$  에서  $q \leq 2p - 3$

$$\therefore M \geq \frac{p^2}{4} + 2p - 3 = \frac{1}{4}(p + 4)^2 - 7$$

따라서  $M$  의 최솟값은  $-7$  이다.

14.  $f(2) = 16$ ,  $f(x) = f(x^4) \cdot (-x^2 + 2x + 4)$  를 만족하는 함수  $f(x)$  에 대하여  $f(-16) = \frac{a}{b}$  일 때,  $a - b$  의 값을 구하여라. (단,  $a, b$  는 서로소이다.)

[배점 6, 상중]

▶ 답:

▶ 정답: 149

해설

$f(x) = f(x^4) \cdot (-x^2 + 2x + 4)$  에서  $x = 2$  를 대입하면  $f(2) = f(16) \times 4$

$\therefore f(16) = 4$

$f(x) = f(x^4) \cdot (-x^2 + 2x + 4)$  에서

$f(x^4) = \frac{f(x)}{(-x^2 + 2x + 4)}$  이고

$f(x^4) \cdot (-x^2 - 2x + 4) = f(-x)$  이므로

$f(-x) = f(x^4) \cdot (-x^2 - 2x + 4)$   
 $= \frac{f(x)}{(-x^2 + 2x + 4)} \cdot (-x^2 - 2x + 4)$

이 식에  $x = 16$  을 대입하면

$f(-16) = \frac{4}{(-284)} \times (-220) = \frac{220}{71}$  이다.

$a = 220, b = 71$

따라서  $a - b = 149$  이다.

15. 이차함수  $y = ax^2 + bx + c$  는  $x = 2$  일 때, 최솟값이  $-2$  이다. 이 함수의 그래프가 제 3 사분면을 지나지 않을 때,  $a$  의 값이 될 수 있는 가장 작은 정수를 구하여라. [배점 6, 상상]

▶ 답:

▶ 정답: 1

해설

$x = 2$  일 때 최솟값  $-2$  를 가진다.  $y = a(x - 2)^2 - 2$ . 또한 최솟값이 존재하므로,  $a > 0$  이다. 그래프가 제3 사분면을 지나지 않는다는 조건을 만족해야 하므로,  $y$  절편이 음이 아닌 실수이어야 한다.

따라서,  $y$  절편  $= 4a - 2 \geq 0, a \geq \frac{1}{2}$  이다.

16. 이차함수  $y = ax^2 + bx + c$  는  $x = 2$  에서 최댓값 3 을 갖고 제2 사분면을 지나지 않는다고 할 때,  $a$  의 값의 범위는? [배점 6, 상상]

①  $a \geq -\frac{3}{4}$     ②  $a \leq -\frac{3}{4}$     ③  $a \leq \frac{3}{4}$

④  $a \leq 3$     ⑤  $a \geq -3$

해설

$y = a(x - 2)^2 + 3(a < 0) \therefore$

$y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$

( $y$ 절편)  $\leq 0, 4a + 3 \leq 0$

$\therefore a \leq -\frac{3}{4}$