문제 풀이 과제

1. 일차함수 $y=f(x)$ 에서 $f(x)=3x-2$ 일 때, $2f(-2)$ 의 값을 구하여라. [배점 2, 하중]

① -12 ② -14 ③ -16

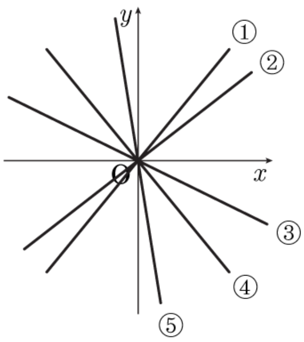
④ -18 ⑤ -20

해설

$f(-2)=-6-2=-8$

$2f(-2)=2\times(-8)=-16$

2. 다음 그래프는 $y=2x,\ y=-x,\ y=\frac{3}{2}x,\ y=-2x,\ y=-4x$ 를 각각 그래프에 나타낸 것이라고 할 때, $y=\frac{3}{2}x$ 의 그래프를 찾아라.



[배점 2, 하중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y=\frac{3}{2}x$ 는 기울기가 양수이므로 ①, ② 중 하나가 되고 ①의 기울기가 ②의 기울기보다 크므로 $y=\frac{3}{2}x$ 의 그래프는 ②가 된다.

3. 좌표평면 위에 두 점 A(2, 1), B(4, 5)가 있다. 직선 $y=-x+b$가 $\overline{\mathrm{AB}}$와 만날 때, b의 값의 범위를 구하면? [배점 3, 하상]

① $-9\le b\le -3$ ② $-9<b<3$

③ $3\le b\le 9$ ④ $3<b<9$

⑤ $-3\le b\le 9$

해설

기울기가 -1이므로 b의 값은 점(2, 1)을 지날 때 최소, (4, 5)를 지날 때 최대이다.

점 $(2,1)$을 대입하면 $1=-2+b,\ \ b=3$이고, 점 $(4,\ 5)$ 를 대입하면 $5=-4+b,\ b=9$ 이다.

$\therefore\ 3\le b\le 9$

4. 일차함수 $y=5x-10$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

y절편은 -10 , x절편은 2이므로

(삼각형의 넓이) $=\frac{1}{2}\times10\times2=10$

5. 직선 $2x-y+b=0$ 과 직선 $x-ay+6=0$ 은 점 $(-2,\ 2)$ 에서 만난다고 할 때 $b-a$ 의 값을 구하면? [배점 3, 중하]

① 6　② 4　③ 3　④ 1　⑤ 0

해설

점 $(-2,\ 2)$ 를 $2x-y+b=0$ 과 $x-ay+6=0$ 에 각각 대입하면

$-4-2+b=0$ $\quad\therefore\ b=6$

$-2-2a+6=0$ $\quad\therefore\ a=2$

$\therefore\ b-a=6-2=4$

6. 두 직선 $ax+y=3,\ 3x-y=4$ 의 교점이 존재하지 않을 때, 상수 a 의 값은? [배점 3, 중하]

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

두 직선의 교점이 존재하지 않는 것은 두 직선이 평행한 것이다. 따라서 기울기는 같고 y 절편이 다르다.

따라서 $\frac{a}{3}=\frac{1}{-1}(\neq\frac{3}{4})$ 이므로 $a=-3$ 이다.

7. 점 $(-3,\ -6)$을 지나는 $y=ax+b$의 그래프가 제 3 사분면을 지나지 않도록 하는 양의 정수 a 의 최솟값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

점 $(-3,\ -6)$을 $y=ax+b$ 에 대입하면

$-6=-3a+b$ $\quad\therefore\ b=3a-6$

제 3 사분면을 지나지 않기 위해서는 기울기는 음수이고, y 절편은 0을 포함한 양수이어야 하므로

$a<0,\ \ 3a-6\geq 0\ \ \rightarrow\ \ a<0,\ \ a\geq 2$이다.

따라서 양의 정수 a의 최솟값은 2이다.

8. 다음 일차방정식의 그래프는 x절편이 b , y절편이 4 이다. 이 때, $a+b$의 값을 구하여라.

$ax+2(a+2)y-8=0$

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: -9

해설

y절편이 4이므로 $(0,\ 4)$를 $ax+2(a+2)y-8=0$ 에 대입하면 $2(a+2)4-8=0$이므로 $a=-1$ 이다.

x절편이 b이므로 $(b,\ 0)$를 $-x+2y-8=0$에 대입하면 $-b-8=0,\ b=-8$이다.

따라서 $a+b=-9$이다.

9. 일차함수 $f(x)$ 에 대하여 $y = -3x+1$ 이고, 치역이 $\{1,\ -2,\ -5,\ -8\}$ 일 때, 정의역의 범위로 옳은 것은? [배점 5, 중상]

① $\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$
② $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$
③ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$
④ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
⑤ $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

해설

치역을 알 때, 정의역을 구하는 문제이다. 이럴 때는 함수를 x 를 한 변에 남도록 정리하고 치역을 정의역으로 생각하고 치역을 구해주면 그것이 본래 문제에서 구하고자 하는 정의역이 된다.
계산을 쉽게 하기 위하여 한 변에 x 만 남도록 정리하면 $x = -\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$ 이다.
$y = 1,\ -2,\ -5,\ -8$ 일 때 x 값을 구하면
$-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$, $-\frac{1}{3} \times (-2) + \frac{1}{3} = 1$, $-\frac{1}{3} \times (-5) + \frac{1}{3} = 2$, $-\frac{1}{3} \times (-8) + \frac{1}{3} = 3$ 이다.
따라서 정의역은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ 이다.

10. 연립방정식 $\begin{cases} x - y = -1 \\ ax + y = -3 \end{cases}$ 과 $\begin{cases} 2x - y = b \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$ 의 해를 그래프를 이용하여 풀었더니 교점의 좌표가 같았다.
이때 $a,\ b$ 의 값을 각각 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :
▶ 답 :
▷ 정답 : $a = -2$
▷ 정답 : $b = 3$

해설

연립방정식 $\begin{cases} x - y = -1 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$ 를 풀면 $x = 4,\ y = 5$ 가 나온다.
$x,\ y$ 값을 $\begin{cases} ax + y = -3 \\ 2x - y = b \end{cases}$ 에 각각 대입하면
$\begin{cases} 4a + 5 = -3 \\ 8 - 5 = b \end{cases}$ 이므로 $a = -2,\ b = 3$ 이다.

11. 일차함수 $y = ax+5$ 의 그래프가 점 $(-2,\ -1)$ 을 지날 때, 이 직선의 기울기를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :
▷ 정답 : 3

해설

$-1 = -2a + 5$
$-6 = -2a$
$\therefore\ a = 3$

12. 두 집합 $A=\{(x,\ y)\mid ax+4y=17\}$, $B=\{(x,\ y)\mid -5x+by=10\}$ 에 대하여 $A\cap B=\{(-1,\ 5)\}$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$ax+4y=17$ 에 점 $(-1,\ 5)$ 를 대입

$-a+20=17$

$a=3$

$-5x+by=10$ 에 점 $(-1,\ 5)$ 를 대입

$5+5b=10$

$b=1$

$\therefore\ a+b=4$

13. 일차함수 $f(x)=ax+2$ 일 때, $f(2)=8$ 일 때, a 의 값은?

[배점 5, 상하]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=ax+2$ 이고, $f(2)=8$ 이므로, $8=2a+2$ 이다. 따라서 $a=3$

14. 직선 $y=-2x+1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선을 A, y 축에 대하여 대칭이동한 직선을 B, 원점에 대하여 대칭이동한 직선을 C 라 할 때, 이 네 개의 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{2}$

해설

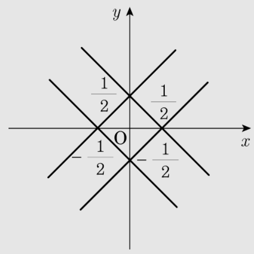
직선 $y=-2x+1$ 에 대하여

직선 A 는 y 대신 $-y$ 를 대입하면 $y=2x-1$

직선 B 는 x 대신 $-x$ 를 대입하면 $y=2x+1$

직선 C 는 y 대신 $-y$, x 대신 $-x$ 를 대입하면 $y=-2x-1$

직선을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



네 개의 직선으로 둘러싸인 부분은 마름모(정사각형)이므로 넓이를 구하면

$\frac{1}{2}\times$ (두 대각선의 곱) $=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$

15. 0이 아닌 상수 a, b 에 대하여 네 직선 $y = ax + b$, $y = -ax - b$, $y = -ax + b$, $y = ax - b$ 가 만나서 이루는 사각형을 직선 $y = mx$ $(m \neq 0)$ 를 기준으로 두 부분 S_1, S_2 로 나누고 두 도형의 둘레의 길이를 각각 a_1, a_2 라고 할 때, $\dfrac{4a_1a_2}{(a_1 + 2a_2)^2}$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{4}{9}$

해설

세 직선은 $y = ax + b$ 를 각각 x 축, y 축, 원점 대칭이동한 직선이고 만들어진 사각형은 마름모이다.
또 마름모의 대각선은 x 축과 y 축이며 대각선의 교점은 원점이다.
마름모의 대각선의 교점을 지나는 직선은 마름모를 이등분하므로 $y = mx$ 를 기준으로 나뉜 두 도형 S_1, S_2 의 둘레의 길이는 같다.

$a_1 = a_2$

$\therefore \dfrac{4a_1a_2}{(a_1 + 2a_2)^2} = \dfrac{4a_1^2}{(3a_1)^2} = \dfrac{4}{9}$

16. $(2, -2)$, $(5, 4)$, $(a, 7)$ 의 세 점이 같은 직선 위에 있도록 a 의 값을 정하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{13}{2}$

해설

세 점이 한 직선 위에 있으므로
$(2, -2)$, $(5, 4)$ 를 지나는 직선의 기울기는
$\dfrac{4-(-2)}{5-2} = 2$
$(5, 4)$, $(a, 7)$ 를 지나는 직선의 기울기는
$\dfrac{7-4}{a-5} = \dfrac{3}{a-5}$
즉, $\dfrac{3}{a-5} = 2$ 이므로 $a = \dfrac{13}{2}$ 이다.

17. 세 점 $(0, a)$, $(-3, 0)$, $(b, 3)$ 를 지나는 직선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 6 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$) [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{13}{4}$

해설

$\dfrac{0-a}{-3-0} = \dfrac{3-0}{b+3}$ 이므로 $a(b+3) = 9$
삼각형의 넓이가 6 이므로
$\dfrac{1}{2} \times a \times 3 = 6$ $(\because a > 0)$
$\therefore\ a = 4$
$a(b+3) = 9$ 에서 $a = 4$ 이면 $b = -\dfrac{3}{4}$
따라서 $a+b = \dfrac{13}{4}$ 이다.

18. 직선 $ax+by=3$ 의 그래프와 x 축, y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 $a,\ b$ 에 관한 식으로 나타내어라. (단, $a,\ b$ 는 상수, $a<0,\ b>0$ 이다.) [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\dfrac{9}{2ab}$

해설

$ax+by=3$ 에서 $by=-ax+3$

$y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{3}{b}$

이 일차함수 그래프가 x 축, y 축과 만나는 점의 좌표는 각각 $\left(\dfrac{3}{a},\ 0\right)$, $\left(0,\ \dfrac{3}{b}\right)$

이 때, $a<0,\ b>0$ 이므로 이 그래프와 x 축, y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{3}{a}\right)\times\dfrac{3}{b}=-\dfrac{9}{2ab}$ 이다.

19. 두 일차함수 $y=ax+c$, $y=bx+c$ 의 그래프와, x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 y 축을 기준으로 나누면 정확히 이등분된다. 이때, $\dfrac{a+b}{a-b}$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y=ax+c$, $y=bx+c$ 의 그래프는 y 절편이 서로 같으므로 $y=ax+c$, $y=bx+c$ 의 그래프와, x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 y 축을 기준으로 나누면 정확히 이등분되려면 두 그래프의 x 절편의 부호는 반대이고 절댓값은 같아야 한다.

각각의 x 절편은 $-\dfrac{c}{a}$, $-\dfrac{c}{b}$ 이므로

$\therefore\ a=-b$

따라서 $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{-b+b}{-b-b}=0$ 이다.

20. x 절편이 y 절편의 $\dfrac{1}{2}$ 인 일차함수의 그래프가 두 점 $(m,\ -3)$, $(2,\ 4m)$ 을 지날 때, m 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\dfrac{7}{2}$

해설

y 절편을 $2a$ 로 놓으면 x 절편은 a 이므로

직선의 기울기는 $\dfrac{2a-0}{0-a}=-2$

즉, 일차함수 $y=-2x+b$ 로 놓으면 이 그래프는 두 점 $(m,\ -3)$, $(2,\ 4m)$ 를 지나므로

$-3=-2m+b$

$4m=-4+b$

위의 두 식을 연립하면 $m=-\dfrac{7}{2}$ 이다.

21. x 절편이 $3p$, y 절편이 $-p$ 인 일차함수의 그래프가 점 $(p,\ 4)$ 를 지날 때, p 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

직선의 기울기는 $\dfrac{-p-0}{0-3p}=\dfrac{1}{3}$

일차함수를 $y=\dfrac{1}{3}x-p$ 로 놓으면 이 그래프는 점 $(p,\ 4)$ 를 지나므로

$4=\dfrac{1}{3}p-p$

$\therefore\ p=-6$

22. 일차함수 $f(x)=2ax+b$ 가 다음 식을 만족할 때, a 의 값을 구하여라.

$$\frac{f(3)-f(1)}{2}+\frac{f(4)-f(2)}{2}+\frac{f(5)-f(3)}{2}+\cdots+\frac{f(102)-f(100)}{2}=800$$

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\dfrac{f(3)-f(1)}{2}+\dfrac{f(4)-f(2)}{2}+\dfrac{f(5)-f(3)}{2}+\cdots+\dfrac{f(102)-f(100)}{2}$

$=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}+\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}+\dfrac{f(5)-f(3)}{5-3}+\cdots+\dfrac{f(102)-f(100)}{102-100}=800$

따라서 주어진 식의 좌변은 $f(x)$ 의 기울기를 100 번 더한 것으로

$2a\times 100=200a=800$ 이다.

$\therefore\ a=4$

23. 일차함수 $f(x)$ 에 대하여 $S(n)=\dfrac{f(p+1)-f(1)}{(-1)\times 1}+\dfrac{f(p+2)-f(2)}{(-1)^2\times 2}+\dfrac{f(p+3)-f(3)}{(-1)^3\times 3}-\cdots+\dfrac{f(p+n)-f(p)}{(-1)^n\times n}$ 라고 정의한다. $S(1)+S(3)+S(5)+\cdots+S(99)=200$ 일 때, $f(x)$ 의 기울기를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\dfrac{4}{p}$

해설

$S(1)=-f(p+1)+f(1)$

$S(3)$

$=-f(p+1)+f(1)+f(p+2)-f(2)-f(p+3)+f(3)$

$=S(1)-\dfrac{f(p+3)-f(p+2)}{(p+3)-(p+2)}+\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}$ 에서

$\dfrac{f(p+3)-f(p+2)}{(p+3)-(p+2)}=\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}=$ (기울기) 이므로 $S(3)=S(1)$

같은 방법으로

$S(1)=S(3)=S(5)=S(7)=\cdots=S(99)$ 이다.

$S(1)+S(3)+S(5)+\cdots+S(99)=50\times S(1)=200$ 이므로 $S(1)=4$

일차함수 $f(x)=ax+b$ 라 하면

$$\begin{aligned}S(1)&=-f(p+1)+f(1)\\&=-a(p+1)-b+a+b\\&=-ap=4\end{aligned}$$

$\therefore\ a=-\dfrac{4}{p}$

따라서 $f(x)$ 의 기울기는 $-\dfrac{4}{p}$ 이다.

24. 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$ 을 만족하고 $\frac{f(m^2)-f(n^2)}{n^2-m^2} = \frac{3}{4}$ 일 때, 이 일차함수의 y 절편을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{21}{8}$

해설

$\frac{f(m^2)-f(n^2)}{n^2-m^2} = \frac{f(m^2)-f(n^2)}{-(m^2-n^2)} = \frac{3}{4}$ 에서

$\frac{f(m^2)-f(n^2)}{m^2-n^2} = -\frac{3}{4}$ 이고 $-\frac{3}{4}$ 은 이 직선의 기울기이다. 따라서 $f(x) = ax + b$ 에서

$f(x) = -\frac{3}{4}x + b$ 이고 $x = \frac{1}{2}$ 일 때, $y = -3$ 이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + b = -3$

$\therefore\ b = -\frac{21}{8}$

따라서 이 그래프의 y 절편은 $-\frac{21}{8}$ 이다.

25. 일차함수 $f(x) = ax + 2$ 가 $f(m) - f(n) = 3n - 3m$ 을 만족할 때, $f(1) + f(4)$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : -11

해설

$f(0) = 2$ 이므로

$f(1) - f(0) = 0 - 3 = -3,\ f(1) = -1$

$f(1) = -1$ 이면 $-1 = a + 2 \qquad \therefore\ a = -3$

$\therefore\ f(x) = -3x + 2$

$f(1) + f(4) = -1 - 10 = -11$

26. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 5)$, $\mathrm{B}(-4,\ -5)$ 에 대하여, 점 A 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 A', 점 B 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 할 때, 삼각형 $\mathrm{A}'\mathrm{BB}'$ 의 넓이를 이등분하는 직선 중, 점 B' 를 지나는 직선의 y 절편을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{15}{7}$

해설

$\mathrm{A}'(-2,\ 5)$, $\mathrm{B}'(4,\ -5)$

구하는 직선이 점 B' 와 $\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}}$ 의 중점$(-3,\ 0)$ 을 지나면 삼각형 $\mathrm{A}'\mathrm{BB}'$ 의 넓이를 이등분된다.

따라서 두 점 $(4,\ -5)$ 과 $(-3,\ 0)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$y = -\frac{0+5}{(-3)-4}(x+3),\ y = -\frac{5}{7}x - \frac{15}{7}$

따라서 구하는 직선의 y 절편은 -15 이다.

27. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$, $\mathrm{B}(3,\ 6)$ 에 대하여, 점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A', 점 B 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 할 때, 삼각형 $\mathrm{OA}'\mathrm{B}'$ 의 넓이를 이등분하는 직선 중, 점 B' 을 지나는 직선의 방정식을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $y =\ -3x - 3$

해설

$\mathrm{A}'(-1,\ -3)$, $\mathrm{B}'(-3,\ 6)$

구하는 직선이 점 B' 와 $\overline{\mathrm{OA}'}$ 의 중점$\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$ 을 지나면 삼각형 $\mathrm{OA}'\mathrm{B}'$ 의 넓이를 이등분된다.

따라서 두 점 $(-3,\ 6)$ 과 $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$ 을 지나는 직선의 방정식은 $y = -3x - 3$ 이다.

28. 좌표평면 위에 네 점 A$(3,\ 5)$, B$(0,\ a)$, C$(3,\ 0)$, D$(6,\ a)$ 가 있을 때, 점 A 에서 B, C 를 거쳐 D 까지의 거리가 최소일 때, 사각형 ABCD 의 넓이를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

점 A 를 y 축에 대하여 대칭인 점을 A$'(-3,\ 5)$, 점 D 와 x 축에 대하여 대칭인 점을 D$'(6,\ -a)$ 라 할 때, $\overline{AB}=\overline{A'B}$, $\overline{CD}=\overline{CD'}$ 이고

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{A'B}+\overline{BC}+\overline{CD'}\geq\overline{A'D'}$

이므로 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$ 의 길이가 최소가 되려면 점 A$'$, B, C, D$'$ 가 일직선 위에 있어야 한다.

$\dfrac{a-5}{0-(-3)}=\dfrac{-a-0}{6-3}$ $\quad\therefore\ a=\dfrac{5}{2}$

따라서 사각형 ABCD 의 넓이는

(삼각형 ABC의 넓이) + (삼각형 ACD의 넓이)

이므로 $\dfrac{1}{2}\times5\times3+\dfrac{1}{2}\times5\times3=15$ 이다.

29. 좌표평면 위에 네 점 A$(k,\ 4)$, B$(0,\ 2)$, C$(k,\ 0)$, D$(9,\ 4)$ 가 있을 때, 점 A 에서 B, C 를 거쳐 D 까지 최단거리로 가려고 할 때, k 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

점 A 를 y 축에 대하여 대칭인 점을 A$'(-k,\ 4)$, 점 D 와 x 축에 대하여 대칭인 점을 D$'(9,\ -4)$ 라 할 때, $\overline{AB}=\overline{A'B}$, $\overline{CD}=\overline{CD'}$ 이고

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{A'B}+\overline{BC}+\overline{CD'}\geq\overline{A'D'}$

이므로 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$ 의 길이가 최소가 되려면 점 A$'$, B, C, D$'$ 가 일직선 위에 있어야 한다.

$\dfrac{2-4}{0-k}=\dfrac{4-0}{9-k}$

$\therefore\ k=3$

30. 좌표평면 위의 두 점 A$(2,\ 7)$, B$(6,\ 1)$ 와 x 축 위의 한 점 P, y 축 위의 한 점 Q 로 이루어진 사각형 ABPQ 의 둘레의 길이가 최소가 되게 하는 두 점 P, Q 를 지나는 직선의 기울기를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

점 A, B 를 각각 y 축, x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A$'(-2,\ 7)$, B$'(6,\ -1)$ 이라 하면 사각형 ABPQ 의 둘레의 길이의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{A'B'}}$ 과 같다.

이때, 두 점 P, Q 를 지나는 직선의 기울기는 $\overline{\mathrm{A'B'}}$ 의 기울기와 같으므로,

$\dfrac{-1-7}{6-(-2)}=\dfrac{-8}{8}=-1$ 이다.

31. 좌표평면 위의 두 점 A$(1,\ 5)$, B$(5,\ 7)$ 과 x 축 위의 한 점 C, y 축 위의 한 점 D 에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{DB}}$ 의 값이 최소가 되게 하는 두 점 C, D 를 지나는 직선의 방정식을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $y=\ -2x-3$

해설

점 A, B 를 각각 x 축, y 축에 대하여 대칭이동한 점을 A$'(1,\ -5)$, $B'(-5,\ 7)$ 이라 하면

$\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{DB}}$ 의 최솟값은 $\overline{\mathrm{A'B'}}$ 과 같다.

직선 $\overline{\mathrm{A'B'}}$ 의 방정식은

$y+5=\dfrac{7+5}{-5-1}(x-1)$

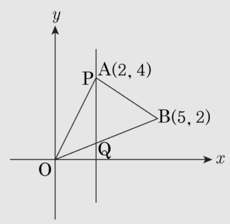
$\therefore\ y=-2x-3$

32. 세 점 원점 O, A$(2,\ 4)$, B$(5,\ 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 AOB 가 있다. y 축에 평행한 직선이 삼각형 AOB 와 두 점 P, Q 에서 만난다고 하고 선분 PQ 의 길이를 최대로 만드는 점 P 의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$, 점 Q 의 좌표를 $(x_2,\ y_2)$ 라 할 때, $x_1x_2-y_1y_2$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{4}{5}$

해설



선분 PQ 의 길이가 최대가 되려면 위의 그림과 같이 점 P 는 점 A 와 같아야 한다.

즉, y 축과 평행한 직선의 그래프는 $x=2$ 이고,

점 Q 의 좌표는 직선 OB 와 $x=2$ 의 교점이다.

직선 OB 의 그래프는 $(0,\ 0)$ 와 $(5,\ 2)$ 을 지나는 직선의 방정식과 같으므로

$y=\dfrac{2}{5}x$

$y=\dfrac{2}{5}x$ 와 $x=2$ 의 교점의 좌표는 Q$\left(2,\ \dfrac{4}{5}\right)$

P$(2,\ 4)$, Q$\left(2,\ \dfrac{4}{5}\right)$ 이므로

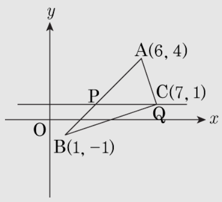
$\therefore\ x_1x_2-y_1y_2=2\times2-4\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{5}$

33. 세 점 A(6, 4), B(1, −1), C(7, 1) 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 가 있다. x 축에 평행한 직선이 삼각형 ABC 와 두 점 PQ 에서 만난다고 할 때, 선분 PQ 의 길이의 최댓값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설



선분 PQ 의 길이가 최대가 되려면 위의 그림과 같이 점 Q 는 점 C 와 같아야 한다.
즉, x 축과 평행한 직선의 그래프는 $y = 1$ 이고,
점 P 의 좌표는 직선 AB 와 $y = 1$ 의 교점이다.
직선 AB 의 그래프는 (6, 4) 와 (1, −1) 을 지나는 직선의 방정식과 같으므로
$y + 1 = \dfrac{4+1}{6-1}(x-1) \qquad \therefore\ y = x - 2$
$y = x - 2$ 와 $y = 1$ 의 교점의 좌표는 P(3, 1)
따라서 선분 PQ 의 길이의 최댓값은 $7 - 3 = 4$ 이다.

34. 일차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(0) = 5$, $f(200) = f(-200)$ 이 성립할 때, $f(1)$ 을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(x) = ax + b$ 라 놓으면
$f(0) = b = 5$,
$f(200) = 200a + b = -200a + b = f(-200)$ 이므로 $a = 0$
$\therefore\ f(x) = 5$
따라서 $f(1) = 5$ 이다.

35. 함수 $f(x) = ax + b$ 가 $f(0) = 0$, $f(1) \le f(100)$, $f(100) \ge f(10000)$ 을 만족할 때, $f(999)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(1) \le f(100)$ 에서 $a+b \le 100a+b$ 이므로 $a \ge 0$
$f(100) \ge f(10000)$ 에서 $100a + b \ge 10000a + b$ 이므로 $a \le 0$
$\therefore\ a = 0$
또한, $f(0) = b = 0$ 에서 $b = 0$
따라서 $f(x) = 0$ 이므로 $f(999) = 0$ 이다.

36. 직선 $y = 3$ 과 수직으로 만나고 $(-1,\ 5)$ 를 지나는 직선의 그래프가 $(a-3)x + (2b+2)y - 4 = 0$ 일 때, 상수 $a,\ b$ 에 대하여 $a - b$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = 3$ 과 수직으로 만나려면 주어진 일차방정식의 y 계수가 0 이 되어야 하고 $(-1,\ 5)$ 를 지나므로

$2b + 2 = 0 \quad \therefore\ b = -1$

$(a-3)(-1) - 4 = 0 \quad \therefore\ a = -1$

$\therefore\ a - b = 0$

37. 일차방정식 $(p-2)x + (3+2q)y - 2 = 0$ 의 그래프가 점 $(1,\ 3)$ 을 지나고 직선 $x = 2$ 와 평행할 때, 상수 p, q 를 각각 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $p = \ 4$

▷ 정답 : $q = \ -\frac{3}{2}$

해설

직선 $x = 2$ 와 평행하므로

$3 + 2q = 0 \quad \therefore\ q = -\frac{3}{2}$

$(p-2)x - 2 = 0$ 에서

$x = \frac{2}{p-2}$ 이고, 점 $(1,\ 3)$ 을 지나므로

$\frac{2}{p-2} = 1,\ p - 2 = 2 \quad \therefore\ p = 4$

따라서 $p = 4,\ q = -\frac{3}{2}$ 이다.

38. 어느 공장에서 장난감 자동차를 생산하는 데 드는 비용을 조사했더니 처음 5개 까지는 고정적으로 100 원의 비용이 들고 그 이후에는 개당 12 원의 비용이 든다고 한다. 이 공장에서 하루에 생산 가능한 장난감 자동차의 개수는 30 개이다. 공장에서 하루 동안 만든 장난감 자동차의 개수를 x 개, 만드는 데 드는 비용을 y 원로 하는 식을 좌표평면의 그래프로 나타낼 때, 이 그래프와 x 축이 이루는 도형의 넓이를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6750

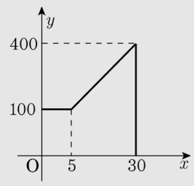
해설

(1) $0 \le x \le 5$ 일 때, $y = 100$

(2) $5 < x \le 30$ 일 때, $y = 100 + 12(x-5)$

$\therefore\ y = 12x + 40$

이 그래프와 x 축과 $x = 30$ (x 의 최대값) 이루는 도형은 아래 그림과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는 $5 \times 100 + \frac{1}{2} \times \{(100+400) \times 25\} = 6750$ 이다.

39. 어느 회사의 미국 통화 요금은 기본 30 초까지는 통화시간에 관계없이 200 원을 부과하고, 이후 초과되는 통화시간에 대해 초당 10 원을 부과한다. 통화 시간을 x 초, 요금을 y 원로 하는 식을 좌표평면의 그래프로 나타낼 때, 이 그래프와 x 축, $x = 120$ 이 이루는 도형의 넓이를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 64500

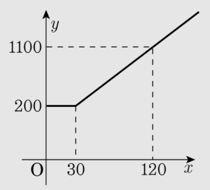
해설

(1) $0 \le x \le 30$ 일 때, $y = 200$

(2) $x > 30$ 일 때, $y = 200 + 10(x - 30)$

$\therefore\ y = 10x - 100$

이 그래프와 x 축과 $x = 120$ 이 이루는 도형은 아래 그림과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는 $30 \times 200 + \frac{1}{2} \times \{(200 + 1100) \times 90\} = 64500$ 이다.

40. 두 직선 $y = |x + 3| + 2|x - 1| + 1$ 과 $y = ax - 1$ 의 교점이 없기 위한 a 의 값의 범위를 구하여라.

[배점 5, 상하]

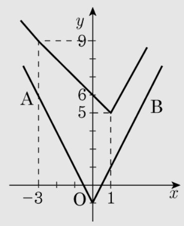
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3 < a < 3$

▷ 정답 : $3 > a > -3$

해설



$y = |x + 3| + 2|x - 1| + 1$ 의 그래프가 위와 같으므로

$y = ax - 1$ 이 직선 A 와 직선 B 사이에 있을 때, 두 그래프가 만난다.

직선 A 의 기울기는 $x < -3$ 일 때,

$y = |x + 3| + 2|x - 1| + 1$ 의 기울기와 같으므로 -3

직선 B 의 기울기는 $x > 1$ 일 때,

$y = |x + 3| + 2|x - 1| + 1$ 의 기울기와 같으므로 3

$\therefore\ -3 < a < 3$

41. $1 \le x \le 5$ 일 때, 함수 $f(x) = |-x+1|+1$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

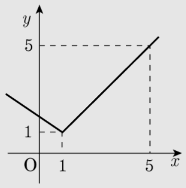
해설

$f(x) = |-x+1|+1$ 는

1) $-x+1 \ge 0$ 일 때, $x \le 1$, $y = -x+2$

2) $-x+1 < 0$ 일 때, $x > 1$, $y = x$

이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $1 \le x \le 5$ 일 때,

최댓값은 $f(5) = 5$, 최솟값은 $f(1) = 1$ 이므로

최댓값과 최솟값의 합은 6 이다.

42. $-1 \le x \le 3$ 일 때, 함수 $f(x) = |x-2|+x$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 : 4

▷ 정답 : 최솟값 : 2

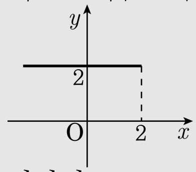
해설

$f(x) = |x-2|+x$ 는

1) $x \ge 2$ 일 때, $y = 2x-2$

2) $x < 2$ 일 때, $y = 2$

이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $-1 \le x \le 3$ 일 때, 최댓값은 $f(3) = 4$, 최솟값은 $f(-1) = 2$ 이다.

43. 두 직선 $y = |x| - 2$ 와 $y = -a$ 가 만나지 않을 때, a 값의 범위를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a > 2$

▷ 정답 : $2 < a$

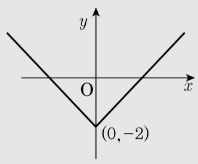
해설

$y = |x| - 2$ 의 그래프는

1) $x \geq 0$ 일 때, $y = x - 2$

2) $x < 0$ 일 때, $y = -x - 2$

이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $y = -a$ 가 $y = |x| - 2$ 의 그래프와 만나지 않는다면, $-a < -2$ 이므로 $a > 2$ 이다.

44. 직선 $y = m(2 - x) + 3$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 후, x 축에 대하여 대칭이동한 직선이 원점을 지나는 직선이 될 때, 상수 m 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{5}{2}$

해설

$y = m(2 - x) + 3$ 을 y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하므로

$y = -mx + 2m + 3 + 2 = -mx + 2m + 5$

또한, 이 직선을 x 축에 대하여 대칭이동하면 y 대신 $-y$ 를 대입하므로

$-y = -mx + 2m + 5$

$\therefore\ y = mx - 2m - 5$

이 직선이 원점을 지나는 직선이 되려면 y 절편이 0 이어야 하므로 $-2m - 5 = 0$

$\therefore\ m = -\frac{5}{2}$

45. 직선 $y = px + 2p - 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 후, y 축에 대하여 대칭이동한 직선이 원점을 지날 때, 상수 p 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$y = px + 2p - 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하면

$y = p(x - 1) + 2p - 1$ 이므로 $y = px + p - 1$

또, y 축에 대하여 대칭이동하면 $y = -px + p - 1$

이 그래프가 원점을 지나면 y 절편이 0 이 되어야 하므로 $0 = p - 1$

$\therefore\ p = 1$

46. 일차함수 $y = ax + 6$ 의 그래프가 $-1 \le x < 3$ 의 범위에서 항상 $y > 0$ 일 때, a 값의 범위를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-2 < a < 6$

▷ 정답 : $6 > a > -2$

해설

일차함수의 그래프는 증가하거나 감소하는 그래프이므로 $-1 \le x < 3$ 의 범위에서 항상 $y > 0$ 이려면 $x = -1$ 일 때 $y > 0$ 이고, $x = 3$ 일 때 $y > 0$ 이어야 한다.

$-a + 6 > 0,\ 3a + 6 > 0$

$\therefore\ -2 < a < 6$

47. $(-2,\ 0)$, $(0,\ 6)$ 를 지나는 일차함수의 그래프가 점 $(m,\ m)$ 을 지날 때, m 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$y = ax + b$ 의 그래프가 $(0,\ 6)$ 을 지나므로

$6 = a \times 0 + b$ 에서 $b = 6$

또한, $y = ax + 6$ 의 그래프가 $(-2,\ 0)$ 을 지나므로

$0 = -2a + 6$ 에서 $a = 3$

따라서 $y = 3x + 6$ 의 그래프가 $(m,\ m)$ 을 지나므로

$x = m,\ y = m$ 을 대입하면 $m = 3m + 6$ 이다.

$\therefore\ m = -3$

48. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하였더니 $y = -3x - 7$ 의 그래프와 일치하였다. 이때, 상수 $a - b$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$y = ax + b$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3 만큼, y 축 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로

$y = a(x - 3) + b + 1 = ax - 3a + b + 1$

이것이 $y = -3x - 7$ 의 그래프와 일치하므로

$a = -3,\ b = -17$

$\therefore\ a - b = 14$

49. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -2 만큼, y 축 방향으로 -3 만큼 평행이동한 그래프가 $y = 2x + 4$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$y = ax + b$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -2 만큼, y 축 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이므로

$y = a(x + 2) + b - 3 = ax + 2a + b - 3$

이것이 $y = 2x + 4$ 의 그래프와 일치하므로 $a = 2$

$2a + b - 3 = 4$ 에서 $b = 3$

$\therefore\ a + b = 5$

50. 일차함수 $y = 2ax + 1$ 이 $b \le x \le 6$ 인 범위에서 $-1 \le y \le 3$ 일 때, ab 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : -1

해설

1) $a > 0$ 일 때, x 의 값이 증가함에 따라 y 의 값도 증가하므로 일차함수 $y = 2ax + 1$ 은 두 점 $(b,\ -1)$, $(6,\ 3)$ 을 지난다.

$$\begin{cases} -1 = 2ab + 1 \\ 3 = 12a + 1 \end{cases}$$

$\therefore\ a = \frac{1}{6},\ b = -6$

$\therefore\ ab = -1$

2) $a < 0$ 일 때, x 의 값이 증가함에 따라 y 의 값은 감소하므로 일차함수 $y = 2ax + 1$ 은 두 점 $(b,\ 3)$, $(6,\ -1)$ 을 지난다.

$$\begin{cases} 3 = 2ab + 1 \\ -1 = 12a + 1 \end{cases}$$

$\therefore\ a = -\frac{1}{6},\ b = -6$

$\therefore\ ab = 1$

따라서 ab 의 값은 1 또는 -1 이다.

51. 일차함수 $y = ax - 1$ 이 $1 \le x \le b$ 인 범위에서 $0 \le y \le 4$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

1) $a > 0$ 일 때,

x 의 값이 증가함에 따라 y 의 값도 증가하므로 일차함수 $y = ax - 1$ 은 두 점 $(1, 0), (b, 4)$ 를 지난다.

$0 = a - 1$

$4 = ab - 1$

$\therefore\ a = 1,\ b = 5$

2) $a < 0$ 일 때,

x 의 값이 증가함에 따라 y 의 값은 감소하므로 일차함수 $y = ax - 1$ 은 두 점 $(1, 4), (b, 0)$ 을 지난다.

$4 = a - 1$

$0 = ab - 1$

$\therefore\ a = 5,\ b = \frac{1}{5}$ (그러나 $a < 0$ 인 조건에 만족하지 못하므로 적합하지 않다.)

따라서 $a+b$ 의 값은 6 이다.

52. 두 직선 $y = x+b$, $y = ax+6$ 이 한 점 $(2, 4)$ 에서 만날 때, a, b 의 값을 각각 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -1$

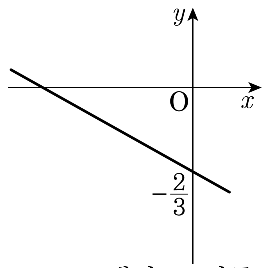
▷ 정답 : $b = 2$

해설

$x = 2,\ y = 4$ 를 $y = x+b$ 에 대입하면 $4 = 2+b$ 이므로 $b = 2$ 이고

$y = ax + 6$ 에 대입하면 $4 = 2 \times a + 6$ 이므로 $a = -1$ 이다.

53. 일차방정식 $5x+6y-4a = 0$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, a 의 값을 구하여라.



[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y = -\frac{5}{6}x + \frac{4a}{6}$

$\frac{4a}{6} = -\frac{2}{3}$

$a = -1$

54. 일차함수 $y = ax + b$ 의 x 절편이 -2 , y 절편이 4 일 때, 일차함수 $y = \frac{b}{a}x + ab$ 의 x 절편과 y 절편의 합을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = 2x + 4$

$a = 2,\ b = 4$

$y = \frac{b}{a}x + ab = 2x + 8$

x 절편 : -4 , y 절편 : 8

$\therefore -4 + 8 = 4$

55. 직선 $y = ax + b$ 는 점 $(3,\ 6)$ 을 지나고 $y = 3x - 9$와 y 축 위에서 만난다. 이 때, $a - b$ 의 값은?
[배점 6, 상중]

① 14 ② 13 ③ 12 ④ 11 ⑤ 10

해설

$y = 3x - 9$ 와 y 축에서 만난다는 것은 y 절편이 같다는 뜻이다.

그러므로 $y = ax - 9$이다.

$6 = 3a - 9$

$3a = 15$

$a = 5,\ b = -9$

$\therefore\ a - b = 5 - (-9) = 14$

56. 일차함수 $y = -9x + 6$ 과 $y = 3ax - b$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은? [배점 6, 상중]

① 두 직선이 서로 일치 할 조건은 $b = -6$ 이다.

② $a = 3$ 이면 두 직선은 서로 평행하다.

③ $a = -3,\ b = -6$ 이면 두 직선은 서로 일치한다.

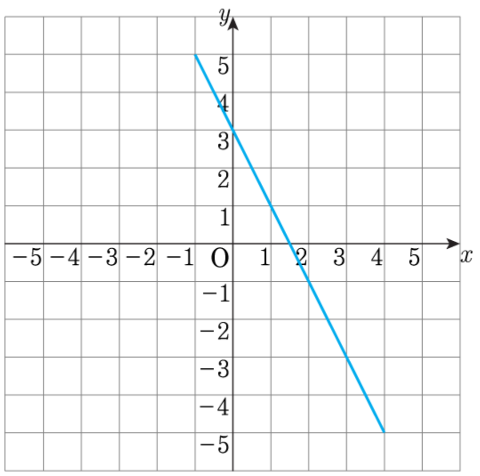
④ 두 직선은 서로 평행하거나 일치할 수 없다.

⑤ 두 직선이 서로 평행 할 조건은 $a = -6$ 이다.

해설

두 직선이 서로 평행하려면 기울기만 같으면 되고, 두 직선이 서로 일치하려면 기울기와 y 절편의 값 모두 같아야 한다. 따라서 $3a = -9,\ a = -3$ 이면 두 직선은 평행하고 $a = -3,\ b = -6$ 이면 두 직선이 일치한다.

57. 일차함수 $y = ax + 3$ 의 그래프가 다음 그래프와 서로 평행할 때, a 의 값을 구하여라.



[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

두 그래프의 기울기가 같으면 서로 평행하다. 주어진 그래프에서 기울기는 $\dfrac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})} = \dfrac{-2}{1} = -2$ 이므로 $a = -2$ 이다.

58. 두 점 $(2,\ -4)$, $(-1,\ 7)$을 지나는 직선이 y축과 만나는 점을 A라고 할 때, 점 A의 y 좌표를 고르면?

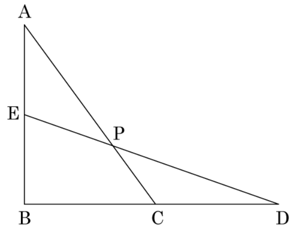
[배점 6, 상중]

① 2 ② $\dfrac{8}{3}$ ③ $\dfrac{10}{3}$ ④ 3 ⑤ $\dfrac{11}{3}$

해설

기울기는 $\dfrac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}$ 이므로 $\dfrac{7-(-4)}{-1-2} = \dfrac{11}{-3} = -\dfrac{11}{3}$ 이다. $y = ax + b$에서 $y = -\dfrac{11}{3}x + b$이므로 $(2,\ -4)$를 대입하면 $-4 = -\dfrac{22}{3} + b,\ b = \dfrac{10}{3}$ 이고, 따라서 이 직선의 일차함수의 식은 $y = -\dfrac{11}{3}x + \dfrac{10}{3}$ 이다. 이 직선의 y절편은 $\dfrac{10}{3}$ 이다.

59. 다음 그림의 삼각형 ABC, BDE 에서 $\angle \mathrm{ABD} = 90°$ 이고, 점 E 는 선분 AB 의 중점, 점 P 는 변 AC 와 DE 의 교점이다. 사각형 PCBE 의 넓이는 삼각형 PAE, PCD 의 넓이의 합과 같고, $\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{EB}}} = k$ 일 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ 의 값을 k 를 사용한 식으로 나타내어라.



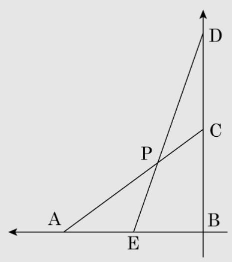
[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{k}{4}$

해설

주어진 도형을 다음 그림과 같이 점 B 가 좌표평면의 원점에 오도록 그래프를 옮기고 $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{EB}} = a$ 라 하면



선분 $\overline{\mathrm{ED}}$ 의 기울기$= \dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{EB}}} = k$ 이므로

$\overline{\mathrm{BD}} = ak$

한편 $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{EB}}$ 이므로 $\triangle\mathrm{PAE} = \triangle\mathrm{PEB}$

또, $\triangle\mathrm{PAE} + \triangle\mathrm{PDC} = \triangle\mathrm{PCBE}$ 이므로

$\triangle\mathrm{PCD} = \triangle\mathrm{PBC}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CB}} = \overline{\mathrm{CD}} = \dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BD}} = \dfrac{1}{2}ak$

$\therefore\ \dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{ak}}{2\mathrm{a}} = \dfrac{\mathrm{k}}{4}$

60. 일차함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $2 \le f(2) \le 4$, $7 \le f(3) \le 11$ 를 만족하는 a 의 값이 최대일 때, $f(x)$ 의 그래프의 x 절편을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{16}{9}$

해설

$2 \le f(2) \le 4$ 이므로 $2 \le 2a + b \le 4 \cdots$ ㉠

$7 \le f(3) \le 11$ 이므로 $7 \le 3a + b \le 11 \cdots$ ㉡

㉡ − ㉠ 을 하면 $3 \le a \le 9$

즉 a 의 최댓값이 9 이므로 $2a + b = 2$ 에 $a = 9$ 를 대입하면 $b = -16$

$\therefore\ f(x) = 9x - 16$

따라서 일차함수 $y = f(x)$ 의 x 절편은 $\dfrac{16}{9}$ 이다.

61. 일차함수 $f(x) = px + q$ 의 그래프는 x 값이 4 만큼 증가할 때 y 의 값은 k 만큼 증가하고 x 값이 1 에서 10 으로 변할 때, y 의 값은 r 만큼 증가한다. 또한 실수 $a,\ b$ 에 대하여 다음 식을 만족할 때, kr 의 값을 구하여라.

$$\frac{f(a) - f(b)}{3} = \frac{b}{2} - \frac{a}{2}$$

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 81

해설

$\dfrac{f(a) - f(b)}{3} = \dfrac{b}{2} - \dfrac{a}{2}$ 에서

$2f(a) - 2f(b) = 3b - 3a$

$2f(a) - f(b) = -3(a - b)$

$\therefore\ \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b} = -\dfrac{3}{2}$

즉, 이 직선의 기울기 $p = -\dfrac{3}{2}$ 이다.

따라서, x 값이 4 만큼 증가할 때 y 의 값은 k 만큼 증가하므로 $\dfrac{k}{4} = -\dfrac{3}{2}$ $\quad\therefore\ k = -6$

또한, x 값이 9 만큼 증가할 때 y 의 값은 r 만큼 증가하므로 $\dfrac{r}{9} = -\dfrac{3}{2}$ $\quad\therefore\ r = -\dfrac{27}{2}$

$\therefore\ kr = (-6) \times \left(-\dfrac{27}{2}\right) = 81$

62. y 는 일차함수 $y = ax + b$ 로 나타내고, x 는 t 에 대한 일차함수 $x = mt + n$ 으로 나타낼 수 있다. t 가 t_0 에서 $t_0 + 4$ 로 증가하면 이에 대응하는 y 값은 y_0 에서 $y_0 + 8$ 로 증가할 때, am 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = ax + b$ 에 $x = mt + n$ 를 대입하면

$y = a(mt + n) + b$

$y = amt + an + b \cdots$ ㉠

㉠에서 t 가 t_0 에서 $t_0 + 4$ 로 증가하면

y 의 증가량은

$(amt_0 + 4am + an + b) - (amt_0 + an + b) = 4am$

y 값은 y_0 에서 $y_0 + 8$ 로 증가할 때, y 의 증가량은 8 이므로

$4am = 8$

$\therefore\ am = 2$

63. 점 $(x,\ y)$ 를 점 $(2x,\ -y)$ 로 이동시키는 규칙에 따라 다음 세 점을 각각 이동시킨 세 점이 한 직선 위에 존재한다. 이때, a 의 값을 구하여라.

$\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{A}(2,\ -4),\ \mathrm{B}(a,\ 3)$

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{3}{2}$

해설

점 $(x,\ y)$ 를 점 $(2x,\ -y)$ 로 이동시키는 규칙에 따라 이동한 점을 각각 O', A', B' 이라 하면 각각 $\mathrm{O}'(0,\ 0)$, $\mathrm{A}'(4,\ 4)$, $\mathrm{B}'(2a,\ -3)$ 이다.
한 직선 위의 두 점의 기울기는 같으므로
두 점 O', A' 을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{4-0}{4-0} = 1$
두 점 A', B' 을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{-3-4}{2a-4} = \frac{-7}{2a-4}$
즉, $\frac{-7}{2a-4} = 1$ 이므로 $a = -\frac{3}{2}$ 이다.

64. f : $\mathrm{A}(x,\ y) \to \mathrm{B}(ax-y,\ x+2y)$ 의 규칙으로 세 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 3)$ 을 이동시키면 이동한 점이 일직선 위에 있게 된다. 이때, a 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

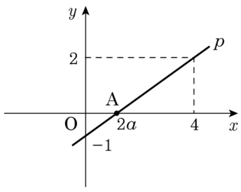
▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$

해설

$(0,\ 0) \to (0,\ 0)$
$(1,\ 2) \to (a-2,\ 5)$
$(2,\ 3) \to (2a-3,\ 8)$
세 점이 일직선 위에 있으므로 기울기가 같다.
$\frac{5-0}{a-2-0} = \frac{8-5}{2a-3-a+2}$
$\therefore\ a = -\frac{1}{2}$

65. 다음 그림과 같은 직선 p 위의 점 A 와 점 $B(6a,\ -3a)$ 를 지나는 다른 직선을 나타내는 일차함수의 관계식이 $y = mx + n$ 일 때, 상수 $m,\ n$ 의 값을 구하여라.



[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = -\frac{3}{4}$

▷ 정답 : $n = 1$

해설

직선 p 의 y 절편은 -1 이므로 직선 p 를 $y = Ax-1$ 이라 할 때, $(4,\ 2)$ 를 지나므로 대입하면

$2 = 4A - 1,\ A = \frac{3}{4}$

즉, $y = \frac{3}{4}x - 1$ 은 점 $A(2a,\ 0)$ 을 지나므로

$0 = \frac{3}{4} \times 2a - 1,\ a = \frac{2}{3}$

$\therefore\ A(2a,\ 0) = \left(\frac{4}{3},\ 0\right),\ B(6a,\ -3a) = (4,\ -2)$

$y = mx + n$ 이 두 점 A, B 를 지나므로

$\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$ 을 대입하면 $0 = \frac{4}{3}m + n$

$(4,\ -2)$ 를 대입하면 $-2 = 4m + n$

따라서 두 식을 연립하면 $m = -\frac{3}{4},\ n = 1$ 이다.

66. 양 끝점의 좌표가 $A(9,\ 25),\ B(106,\ 658)$ 인 선분 AB 위에 있는 점 $(m,\ n)$ 중 $m,\ n$ 이 모두 자연수인 점의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2 개

해설

$(m,\ n)$ 을 점 C 라고 하면 점 A, B, C 는 모두 한 직선 위에 있고

$\overline{AB}$ 의 기울기는 $\frac{658-25}{106-9} = \frac{633}{97}$ 이므로

$\overline{AC}$ 의 기울기는 $\frac{n-25}{m-9} = \frac{633}{97}$

이때, $n - 25 = 633k,\ m - 9 = 97k$ 로 놓으면

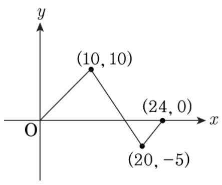
(단, $k \neq 0$)

$m = 97k + 9$ 에서 $m = 9,\ 106$

$n = 633k + 25$ 에서 $n = 25,\ 633$

따라서 조건을 만족하는 $C(m,\ n)$ 은 $(9,\ 25)$, $(106,\ 633)$ 의 2 개이다.

67. 정의역이 $0 \le x \le 24$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다. $f(x) = f(x+4)$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.



[배점 6, 상중]

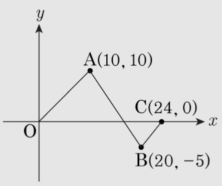
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{38}{5}$

▷ 정답 : $\dfrac{200}{11}$

해설



직선 OA 의 방정식 $f_1(x) = x \cdots$ ㉠

직선 AB 의 방정식 $f_2(x) = -\dfrac{3}{2}x + 25 \cdots$ ㉡

직선 BC 의 방정식 $f_3(x) = \dfrac{5}{4}x - 30 \cdots$ ㉢

$f(x) = f(x+4)$ 이므로

1) ㉠, ㉡에서 $f_1(x) = f_2(x+4)$ 이 성립한다.

$f_1(x) = x$

$f_2(x+4) = -\dfrac{3}{2}(x+4) + 25$ 이므로

$x = -\dfrac{3}{2}(x+4) + 25$

$\therefore\ x = \dfrac{38}{5}$

2) ㉡, ㉢에서 $f_2(x) = f_3(x+4)$ 이 성립한다.

$f_2(x) = -\dfrac{3}{2}x + 25$

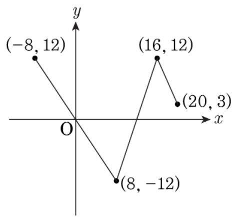
$f_3(x+4) = \dfrac{5}{4}(x+4) - 30$ 이므로

$-\dfrac{3}{2}x + 25 = \dfrac{5}{4}(x+4) - 30$

$\therefore\ x = \dfrac{200}{11}$

따라서 x 의 값은 $\dfrac{38}{5}$ 또는 $\dfrac{200}{11}$ 이다.

68. 정의역이 $-8 \le x \le 20$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다. $f(k-3) = f(k+3)$ 을 만족하는 k 의 값을 구하여라.



[배점 6, 상중]

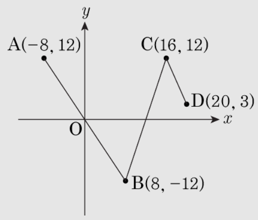
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{15}{2}$

▷ 정답 : $\dfrac{99}{5}$

해설



직선 AB 의 방정식 $y = -x \cdots$ ㉠

직선 BC 의 방정식 $y = 3x - 36 \cdots$ ㉡

직선 CD 의 방정식 $y = -\dfrac{9}{4}x + 48 \cdots$ ㉢

$f(k-3) = f(k+3)$ 에서 $k-3 = x$ 일 때,

$f(x) = f(x+6)$ 이므로

1) ㉡에 x 대신 $x+6$ 을 대입하면

$y = 3x - 18 \cdots$ ㉣

㉠, ㉣의 값이 같으므로

$-x = 3x - 18,\ x = \dfrac{18}{4}$ $\qquad \therefore\ k = \dfrac{15}{2}$

2) ㉢에 x 대신 $x+6$ 을 대입하면

$y = -\dfrac{9}{4}x + 21 \cdots$ ㉤

㉠, ㉤의 값이 같으므로

$-x = -\dfrac{9}{4}x + 21,\ x = \dfrac{84}{5}$ $\qquad \therefore\ k = \dfrac{99}{5}$

따라서 k 의 값은 $\dfrac{15}{2}$ 또는 $\dfrac{99}{5}$ 이다.

69. 일차함수 $y = mx - 1$ 의 그래프의 정의역과 치역이 모두 집합 $A = \{x \mid 0 \le x \le n\}$ 와 같을 때, $m+n$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x = 0$ 일 때 $y = -1$, $x = n$ 일 때 $y = mn - 1$ 이므로

1) $m > 0$ 일 때, $-1 \le y \le mn - 1$ 이므로
$0 \le x \le n$ 와 일치할 수 없다.

2) $m < 0$ 일 때, $mn - 1 \le y \le -1$ 이므로
$0 \le x \le n$ 와 일치하려면 $mn - 1 = 0$, $n = -1$
$\therefore\ n = -1,\ m = -1$

따라서 1), 2) 에 의해 $m + n = -2$ 이다.

70. 두 직선 $\begin{cases} 3x + 3y = -5 \\ 6x + 4y = -2 \end{cases}$ 의 교점을 지나고, 직선 $3x + 5y + 1 = 0$ 과 평행한 직선의 x 절편을 구하여라. [배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\dfrac{13}{3}$

해설

$\begin{cases} 6x + 6y = -10 \\ 6x + 4y = -2 \end{cases}$

$\therefore\ y = -4,\ x = \dfrac{7}{3}$

$3x + 5y + 1 = 0$ 과 평행한 직선이므로 기울기는 $-\dfrac{3}{5}$ 이다.

$y = -\dfrac{3}{5}x + b$ 에 $(\dfrac{7}{3},\ -4)$

$-4 = -\dfrac{7}{5} + b$

$\therefore\ b = -\dfrac{13}{5}$

따라서 $y = -\dfrac{3}{5}x - \dfrac{13}{5}$ 의 x 절편은 $\dfrac{13}{5} = -\dfrac{3}{5}x$,

$x = -\dfrac{13}{3}$ 이다.