

문제 풀이 과제

1. 일차함수 $y = f(x)$ 에서 $f(x) = 3x - 2$ 일 때, $2f(-2)$ 의 값을 구하여라. [배점 2, 하중]

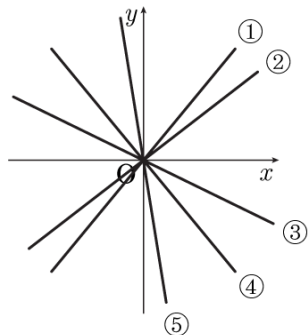
- ① -12 ② -14 ③ -16
④ -18 ⑤ -20

해설

$$f(-2) = -6 - 2 = -8$$

$$2f(-2) = 2 \times (-8) = -16$$

2. 다음 그래프는 $y = 2x$, $y = -x$, $y = \frac{3}{2}x$, $y = -2x$, $y = -4x$ 를 각각 그래프에 나타낸 것이라고 할 때, $y = \frac{3}{2}x$ 의 그래프를 찾아라.



[배점 2, 하중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 2

해설

$y = \frac{3}{2}x$ 는 기울기가 양수이므로 ①, ② 중 하나가 되고 ①의 기울기가 ②의 기울기보다 크므로 $y = \frac{3}{2}x$ 의 그래프는 ②가 된다.

3. 좌표평면 위에 두 점 A(2, 1), B(4, 5)가 있다. 직선 $y = -x + b$ 가 $\overline{AB}$ 와 만날 때, b 의 값의 범위를 구하면?

[배점 3, 하상]

- ① $-9 \leq b \leq -3$ ② $-9 < b < 3$
③ $3 \leq b \leq 9$ ④ $3 < b < 9$
⑤ $-3 \leq b \leq 9$

해설

기울기가 -1이므로 b 의 값은 점(2, 1)을 지날 때 최소, (4, 5)를 지날 때 최대이다.

점 (2, 1)을 대입하면 $1 = -2 + b$, $b = 3$ 이고, 점 (4, 5)를 대입하면 $5 = -4 + b$, $b = 9$ 이다.
 $\therefore 3 \leq b \leq 9$

4. 일차함수 $y = 5x - 10$ 의 그래프와 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 10

해설

y 절편은 -10, x 절편은 2이므로
(삼각형의 넓이) $= \frac{1}{2} \times 10 \times 2 = 10$

5. 직선 $2x - y + b = 0$ 과 직선 $x - ay + 6 = 0$ 은 점 $(-2, 2)$ 에서 만난다고 할 때 $b - a$ 의 값을 구하면?
[배점 3, 중하]

① 6 ② 4 ③ 3 ④ 1 ⑤ 0

해설

점 $(-2, 2)$ 를 $2x - y + b = 0$ 과 $x - ay + 6 = 0$ 에 각각 대입하면
 $-4 - 2 + b = 0 \quad \therefore b = 6$
 $-2 - 2a + 6 = 0 \quad \therefore a = 2$
 $\therefore b - a = 6 - 2 = 4$

6. 두 직선 $ax + y = 3$, $3x - y = 4$ 의 교점이 존재하지 않을 때, 상수 a 의 값은?
[배점 3, 중하]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

두 직선의 교점이 존재하지 않는 것은 두 직선이 평행한 것이다. 따라서 기울기는 같고 y 절편이 다르다.
 따라서 $\frac{a}{3} = \frac{1}{-1} (\neq \frac{3}{4})$ 이므로 $a = -3$ 이다.

7. 점 $(-3, -6)$ 을 지나는 $y = ax + b$ 의 그래프가 제 3 사분면을 지나지 않도록 하는 양의 정수 a 의 최솟값을 구하여라.
[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

점 $(-3, -6)$ 을 $y = ax + b$ 에 대입하면
 $-6 = -3a + b \quad \therefore b = 3a - 6$
 제 3 사분면을 지나지 않기 위해서는
 기울기는 음수이고, y 절편은 0을 포함한 양수이어야 하므로
 $a < 0, 3a - 6 \geq 0 \rightarrow a < 0, a \geq 2$ 이다.
 따라서 양의 정수 a 의 최솟값은 2이다.

8. 다음 일차방정식의 그래프는 x 절편이 b , y 절편이 4이다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

$$ax + 2(a + 2)y - 8 = 0$$

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

y 절편이 4이므로 $(0, 4)$ 를 $ax + 2(a + 2)y - 8 = 0$ 에 대입하면 $2(a + 2)4 - 8 = 0$ 이므로 $a = -1$ 이다.
 x 절편이 b 이므로 $(b, 0)$ 를 $-x + 2y - 8 = 0$ 에 대입하면 $-b - 8 = 0, b = -8$ 이다.
 따라서 $a + b = -9$ 이다.

9. 일차함수 $f(x)$ 에 대하여 $y = -3x + 1$ 이고, 치역이 $\{1, -2, -5, -8\}$ 일 때, 정의역의 범위로 옳은 것은?
[배점 5, 중상]

- ① $\{-1, 0, 1, 2\}$ ② $\{0, 1, 2, 3\}$
③ $\{1, 2, 3, 4\}$ ④ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
⑤ $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

해설

치역을 알 때, 정의역을 구하는 문제이다. 이럴 때는 함수를 x 를 한 변에 남도록 정리하고 치역을 정의역으로 생각하고 치역을 구해주면 그것이 본래 문제에서 구하고자 하는 정의역이 된다.

계산을 쉽게 하기 위하여 한 변에 x 만 남도록 정리하면 $x = -\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$ 이다.

$y = 1, -2, -5, -8$ 일 때 x 값을 구하면
 $-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0, -\frac{1}{3} \times (-2) + \frac{1}{3} = 1, -\frac{1}{3} \times (-5) + \frac{1}{3} = 2, -\frac{1}{3} \times (-8) + \frac{1}{3} = 3$ 이다.
따라서 정의역은 $\{0, 1, 2, 3\}$ 이다.

10. 연립방정식 $\begin{cases} x - y = -1 \\ ax + y = -3 \end{cases}$ 과 $\begin{cases} 2x - y = b \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$ 의 해를 그래프를 이용하여 풀었더니 교점의 좌표가 같았다.

이때 a, b 의 값을 각각 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = -2$

▷ 정답: $b = 3$

해설

연립방정식 $\begin{cases} x - y = -1 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$ 를 풀면 $x = 4, y = 5$ 가 나온다.

x, y 값을 $\begin{cases} ax + y = -3 \\ 2x - y = b \end{cases}$ 에 각각 대입하면

$\begin{cases} 4a + 5 = -3 \\ 8 - 5 = b \end{cases}$ 이므로 $a = -2, b = 3$ 이다.

11. 일차함수 $y = ax + 5$ 의 그래프가 점 $(-2, -1)$ 을 지날 때, 이 직선의 기울기를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$$-1 = -2a + 5$$

$$-6 = -2a$$

$$\therefore a = 3$$

12. 두 집합 $A = \{(x, y) \mid ax + 4y = 17\}$,
 $B = \{(x, y) \mid -5x + by = 10\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{(-1, 5)\}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 4

해설

$ax + 4y = 17$ 에 점 $(-1, 5)$ 를 대입
 $-a + 20 = 17$
 $a = 3$
 $-5x + by = 10$ 에 점 $(-1, 5)$ 를 대입
 $5 + 5b = 10$
 $b = 1$
 $\therefore a + b = 4$

13. 일차함수 $f(x) = ax + 2$ 일 때, $f(2) = 8$ 일 때, a 의 값은? [배점 5, 상하]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) = ax + 2$ 이고, $f(2) = 8$ 이므로, $8 = 2a + 2$ 이다. 따라서 $a = 3$

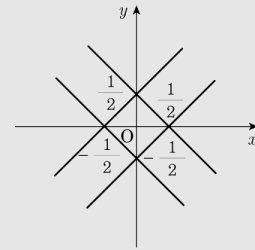
14. 직선 $y = -2x + 1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선을 A, y 축에 대하여 대칭이동한 직선을 B, 원점에 대하여 대칭이동한 직선을 C 라 할 때, 이 네 개의 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{1}{2}$

해설

직선 $y = -2x + 1$ 에 대하여
 직선 A 는 y 대신 $-y$ 를 대입하면 $y = 2x - 1$
 직선 B 는 x 대신 $-x$ 를 대입하면 $y = 2x + 1$
 직선 C 는 y 대신 $-y$, x 대신 $-x$ 를 대입하면
 $y = -2x - 1$
 직선을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



네 개의 직선으로 둘러싸인 부분은 마름모(정사각형)이므로 넓이를 구하면
 $\frac{1}{2} \times (\text{두 대각선의 곱}) = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$

15. 0이 아닌 상수 a, b 에 대하여 네 직선 $y = ax + b$, $y = -ax - b$, $y = -ax + b$, $y = ax - b$ 가 만나서 이루는 사각형을 직선 $y = mx$ ($m \neq 0$) 를 기준으로 두 부분 S_1, S_2 로 나누고 두 도형의 둘레의 길이를 각각 a_1, a_2 라고 할 때, $\frac{4a_1a_2}{(a_1 + 2a_2)^2}$ 의 값을 구하여라.
[배점 5, 상하]

▶ 답 :
▷ 정답 : $\frac{4}{9}$

해설

세 직선은 $y = ax + b$ 를 각각 x 축, y 축, 원점 대칭이동한 직선이고 만들어진 사각형은 마름모이다.

또 마름모의 대각선은 x 축과 y 축이며 대각선의 교점은 원점이다.

마름모의 대각선의 교점을 지나는 직선은 마름모를 이등분하므로 $y = mx$ 를 기준으로 나뉜 두 도형 S_1, S_2 의 둘레의 길이는 같다.

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 \\ \therefore \frac{4a_1a_2}{(a_1 + 2a_2)^2} &= \frac{4a_1^2}{(3a_1)^2} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

16. $(2, -2), (5, 4), (a, 7)$ 의 세 점이 같은 직선 위에 있도록 a 의 값을 정하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :
▷ 정답 : $\frac{13}{2}$

해설

세 점이 한 직선 위에 있으므로

$$\begin{aligned} (2, -2), (5, 4) \text{ 를 지나는 직선의 기울기는 } & \frac{4 - (-2)}{5 - 2} = 2 \\ (5, 4), (a, 7) \text{ 를 지나는 직선의 기울기는 } & \frac{7 - 4}{a - 5} = \frac{3}{a - 5} \\ \text{즉, } \frac{3}{a - 5} &= 2 \text{ 이므로 } a = \frac{13}{2} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

17. 세 점 $(0, a), (-3, 0), (b, 3)$ 를 지나는 직선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 6 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$) [배점 5, 상하]

▶ 답 :
▷ 정답 : $\frac{13}{4}$

해설

$$\begin{aligned} \frac{0 - a}{-3 - 0} &= \frac{3 - 0}{b + 3} \text{ 이므로 } a(b + 3) = 9 \\ \text{삼각형의 넓이가 6 이므로} & \\ \frac{1}{2} \times a \times 3 &= 6 \text{ } (\because a > 0) \\ \therefore a &= 4 \\ a(b + 3) &= 9 \text{ 에서 } a = 4 \text{ 이면 } b = -\frac{3}{4} \\ \text{따라서 } a + b &= \frac{13}{4} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

18. 직선 $ax+by=3$ 의 그래프와 x 축, y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 a, b 에 관한 식으로 나타내어라. (단, a, b 는 상수, $a < 0, b > 0$ 이다.) [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: $-\frac{9}{2ab}$

해설

$ax+by=3$ 에서 $by=-ax+3$

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{3}{b}$$

이 일차함수 그래프가 x 축, y 축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(\frac{3}{a}, 0), (0, \frac{3}{b})$

이 때, $a < 0, b > 0$ 이므로 이 그래프와 x 축, y

축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{a}\right) \times \frac{3}{b} = -\frac{9}{2ab} \text{ 이다.}$$

19. 두 일차함수 $y=ax+c, y=bx+c$ 의 그래프와, x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 y 축을 기준으로 나누면 정확히 이등분된다. 이때, $\frac{a+b}{a-b}$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: 0

해설

$y=ax+c, y=bx+c$ 의 그래프는 y 절편이 서로 같으므로 $y=ax+c, y=bx+c$ 의 그래프와, x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 y 축을 기준으로 나누면 정확히 이등분되려면 두 그래프의 x 절편의 부호는 반대이고 절댓값은 같아야 한다.

각각의 x 절편은 $-\frac{c}{a}, -\frac{c}{b}$ 이므로

$$\therefore a = -b$$

$$\text{따라서 } \frac{a+b}{a-b} = \frac{-b+b}{-b-b} = 0 \text{ 이다.}$$

20. x 절편이 y 절편의 $\frac{1}{2}$ 인 일차함수의 그래프가 두 점 $(m, -3), (2, 4m)$ 을 지날 때, m 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: $-\frac{7}{2}$

해설

y 절편을 $2a$ 로 놓으면 x 절편은 a 이므로

$$\text{직선의 기울기는 } \frac{2a-0}{0-a} = -2$$

즉, 일차함수 $y=-2x+b$ 로 놓으면 이 그래프는

두 점 $(m, -3), (2, 4m)$ 를 지나므로

$$-3 = -2m + b$$

$$4m = -4 + b$$

위의 두 식을 연립하면 $m = -\frac{7}{2}$ 이다.

21. x 절편이 $3p, y$ 절편이 $-p$ 인 일차함수의 그래프가 점 $(p, 4)$ 를 지날 때, p 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: -6

해설

$$\text{직선의 기울기는 } \frac{-p-0}{0-3p} = \frac{1}{3}$$

일차함수를 $y = \frac{1}{3}x - p$ 로 놓으면 이 그래프는 점

$(p, 4)$ 를 지나므로

$$4 = \frac{1}{3}p - p$$

$$\therefore p = -6$$

22. 일차함수 $f(x) = 2ax + b$ 가 다음 식을 만족할 때, a 의 값을 구하여라.

$$\frac{f(3) - f(1)}{2} + \frac{f(4) - f(2)}{2} + \frac{f(5) - f(3)}{2} + \cdots + \frac{f(102) - f(100)}{2} = 800$$

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned} & \frac{f(3) - f(1)}{2} + \frac{f(4) - f(2)}{2} + \frac{f(5) - f(3)}{2} \\ & + \cdots + \frac{f(102) - f(100)}{2} \\ & = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} + \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} + \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} \\ & + \cdots + \frac{f(102) - f(100)}{102 - 100} = 800 \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 좌변은 $f(x)$ 의 기울기를 100번 더한 것으로

$$2a \times 100 = 200a = 800 \text{ 이다.}$$

$$\therefore a = 4$$

23. 일차함수 $f(x)$ 에 대하여 $S(n) = \frac{f(p+1) - f(1)}{(-1) \times 1} + \frac{f(p+2) - f(2)}{(-1)^2 \times 2} + \frac{f(p+3) - f(3)}{(-1)^3 \times 3} - \cdots + \frac{f(p+n) - f(p)}{(-1)^n \times n}$ 라고 정의한다. $S(1) + S(3) + S(5) + \cdots + S(99) = 200$ 일 때, $f(x)$ 의 기울기를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{4}{p}$

해설

$$S(1) = -f(p+1) + f(1)$$

$$S(3)$$

$$= -f(p+1) + f(1) + f(p+2) - f(2) - f(p+3) + f(3)$$

$$= S(1) - \frac{f(p+3) - f(p+2)}{(p+3) - (p+2)} + \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} \text{ 에}$$

서

$$\frac{f(p+3) - f(p+2)}{(p+3) - (p+2)} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = (\text{기울기})$$

$$\text{이므로 } S(3) = S(1)$$

같은 방법으로

$$S(1) = S(3) = S(5) = S(7) = \cdots = S(99) \text{ 이다.}$$

$$S(1) + S(3) + S(5) + \cdots + S(99) = 50 \times S(1) = 200$$

$$\text{이므로 } S(1) = 4$$

일차함수 $f(x) = ax + b$ 라 하면

$$S(1) = -f(p+1) + f(1)$$

$$= -a(p+1) - b + a + b$$

$$= -ap = 4$$

$$\therefore a = -\frac{4}{p}$$

따라서 $f(x)$ 의 기울기는 $-\frac{4}{p}$ 이다.

24. 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$ 을 만족하고 $\frac{f(m^2) - f(n^2)}{n^2 - m^2} = \frac{3}{4}$ 일 때, 이 일차함수의 y 절편을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: $-\frac{21}{8}$

해설

$\frac{f(m^2) - f(n^2)}{n^2 - m^2} = \frac{f(m^2) - f(n^2)}{-(m^2 - n^2)} = \frac{3}{4}$ 에서
 $\frac{f(m^2) - f(n^2)}{m^2 - n^2} = -\frac{3}{4}$ 이고 $-\frac{3}{4}$ 은 이 직선의 기울기이다. 따라서 $f(x) = ax + b$ 에서
 $f(x) = -\frac{3}{4}x + b$ 이고 $x = \frac{1}{2}$ 일 때, $y = -3$ 이므로
 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + b = -3$
 $\therefore b = -\frac{21}{8}$
 따라서 이 그래프의 y 절편은 $-\frac{21}{8}$ 이다.

25. 일차함수 $f(x) = ax + 2$ 가 $f(m) - f(n) = 3n - 3m$ 을 만족할 때, $f(1) + f(4)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: -11

해설

$f(0) = 2$ 이므로
 $f(1) - f(0) = 0 - 3 = -3, f(1) = -1$
 $f(1) = -1$ 이면 $-1 = a + 2 \therefore a = -3$
 $\therefore f(x) = -3x + 2$
 $f(1) + f(4) = -1 - 10 = -11$

26. 좌표평면 위의 두 점 $A(2, 5), B(-4, -5)$ 에 대하여, 점 A 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' , 점 B 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 할 때, 삼각형 $A'BB'$ 의 넓이를 이등분하는 직선 중, 점 B' 를 지나는 직선의 y 절편을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: $-\frac{15}{7}$

해설

$A'(-2, 5), B'(4, -5)$
 구하는 직선이 점 B' 와 $\overline{A'B}$ 의 중점 $(-3, 0)$ 을 지나면 삼각형 $A'BB'$ 의 넓이를 이등분된다.
 따라서 두 점 $(4, -5)$ 과 $(-3, 0)$ 를 지나는 직선의 방정식은
 $y = -\frac{0+5}{(-3)-4}(x+3), y = -\frac{5}{7}x - \frac{15}{7}$
 따라서 구하는 직선의 y 절편은 $-\frac{15}{7}$ 이다.

27. 좌표평면 위의 두 점 $A(-1, 3), B(3, 6)$ 에 대하여, 점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' , 점 B 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 할 때, 삼각형 $OA'B'$ 의 넓이를 이등분하는 직선 중, 점 B' 을 지나는 직선의 방정식을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: $y = -3x - 3$

해설

$A'(-1, -3), B'(-3, 6)$
 구하는 직선이 점 B' 와 $\overline{OA'}$ 의 중점 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ 을 지나면 삼각형 $OA'B'$ 의 넓이를 이등분된다.
 따라서 두 점 $(-3, 6)$ 과 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ 을 지나는 직선의 방정식은 $y = -3x - 3$ 이다.

28. 좌표평면 위에 네 점 $A(3, 5)$, $B(0, a)$, $C(3, 0)$, $D(6, a)$ 가 있을 때, 점 A 에서 B, C 를 거쳐 D 까지의 거리가 최소일 때, 사각형 ABCD 의 넓이를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

점 A 를 y 축에 대하여 대칭인 점을 $A'(-3, 5)$,
점 D 와 x 축에 대하여 대칭인 점을 $D'(6, -a)$ 라
할 때, $\overline{AB} = \overline{A'B}$, $\overline{CD} = \overline{CD'}$ 이고

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{A'B} + \overline{BC} + \overline{CD'} \geq \overline{A'D'}$$

이므로 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ 의 길이가 최소가 되려면

점 A' , B, C, D' 가 일직선 위에 있어야 한다.

$$\frac{a-5}{0-(-3)} = \frac{-a-0}{6-3} \quad \therefore a = \frac{5}{2}$$

따라서 사각형 ABCD 의 넓이는

(삼각형 ABC의 넓이) + (삼각형 ACD의 넓이)

$$\text{이므로 } \frac{1}{2} \times 5 \times 3 + \frac{1}{2} \times 5 \times 3 = 15 \text{ 이다.}$$

29. 좌표평면 위에 네 점 $A(k, 4)$, $B(0, 2)$, $C(k, 0)$, $D(9, 4)$ 가 있을 때, 점 A 에서 B, C 를 거쳐 D 까지 최단거리로 가려고 할 때, k 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

점 A 를 y 축에 대하여 대칭인 점을 $A'(-k, 4)$,
점 D 와 x 축에 대하여 대칭인 점을 $D'(9, -4)$ 라
할 때, $\overline{AB} = \overline{A'B}$, $\overline{CD} = \overline{CD'}$ 이고

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{A'B} + \overline{BC} + \overline{CD'} \geq \overline{A'D'}$$

이므로 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ 의 길이가 최소가 되려면

점 A' , B, C, D' 가 일직선 위에 있어야 한다.

$$\frac{2-4}{0-k} = \frac{4-0}{9-k}$$

$$\therefore k = 3$$

30. 좌표평면 위의 두 점 A(2, 7), B(6, 1)와 x 축 위의 한 점 P, y 축 위의 한 점 Q로 이루어진 사각형 ABPQ의 둘레의 길이가 최소가 되게 하는 두 점 P, Q를 지나는 직선의 기울기를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

점 A, B를 각각 y 축, x 축에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(-2, 7)$, $B'(6, -1)$ 이라 하면 사각형 ABPQ의 둘레의 길이의 최솟값은 $\overline{AB} + \overline{A'B'}$ 과 같다.

이때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 기울기는 $\overline{A'B'}$ 의 기울기와 같으므로,

$$\frac{-1-7}{6-(-2)} = \frac{-8}{8} = -1$$
이다.

31. 좌표평면 위의 두 점 A(1, 5), B(5, 7)과 x 축 위의 한 점 C, y 축 위의 한 점 D에 대하여 $\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DB}$ 의 값이 최소가 되게 하는 두 점 C, D를 지나는 직선의 방정식을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: $y = -2x - 3$

해설

점 A, B를 각각 x 축, y 축에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(1, -5)$, $B'(-5, 7)$ 이라 하면 $\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DB}$ 의 최솟값은 $\overline{A'B'}$ 과 같다.

직선 $\overline{A'B'}$ 의 방정식은

$$y + 5 = \frac{7+5}{-5-1}(x-1)$$

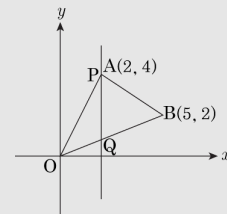
 $\therefore y = -2x - 3$

32. 세 점 원점 O, A(2, 4), B(5, 2)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 AOB가 있다. y 축에 평행한 직선이 삼각형 AOB와 두 점 P, Q에서 만난다고 하고 선분 PQ의 길이를 최대로 만드는 점 P의 좌표를 (x_1, y_1) , 점 Q의 좌표를 (x_2, y_2) 라 할 때, $x_1x_2 - y_1y_2$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{4}{5}$

해설



선분 PQ의 길이가 최대가 되려면 위의 그림과 같이 점 P는 점 A와 같아야 한다.

즉, y 축과 평행한 직선의 그래프는 $x = 2$ 이고, 점 Q의 좌표는 직선 OB와 $x = 2$ 의 교점이다. 직선 OB의 그래프는 (0, 0)와 (5, 2)을 지나는 직선의 방정식과 같으므로

$$y = \frac{2}{5}x$$

$$y = \frac{2}{5}x \text{ 와 } x = 2 \text{ 의 교점의 좌표는 } Q\left(2, \frac{4}{5}\right)$$

$$P(2, 4), Q\left(2, \frac{4}{5}\right) \text{ 이므로}$$

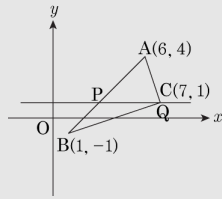
$$\therefore x_1x_2 - y_1y_2 = 2 \times 2 - 4 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

33. 세 점 A(6, 4), B(1, -1), C(7, 1) 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 가 있다. x 축에 평행한 직선이 삼각형 ABC 와 두 점 PQ 에서 만난다고 할 때, 선분 PQ 의 길이의 최댓값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설



선분 PQ 의 길이가 최대가 되려면 위의 그림과 같이 점 Q 는 점 C 와 같아야 한다.

즉, x 축과 평행한 직선의 그래프는 $y = 1$ 이고, 점 P 의 좌표는 직선 AB 와 $y = 1$ 의 교점이다. 직선 AB 의 그래프는 (6, 4) 와 (1, -1) 을 지나는 직선의 방정식과 같으므로

$$y + 1 = \frac{4 + 1}{6 - 1}(x - 1) \quad \therefore y = x - 2$$

$y = x - 2$ 와 $y = 1$ 의 교점의 좌표는 P(3, 1)

따라서 선분 PQ 의 길이의 최댓값은 $7 - 3 = 4$ 이다.

34. 일차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(0) = 5$, $f(200) = f(-200)$ 이 성립할 때, $f(1)$ 을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(x) = ax + b$ 라 놓으면

$$f(0) = b = 5,$$

$f(200) = 200a + b = -200a + b = f(-200)$ 이므로 $a = 0$

$$\therefore f(x) = 5$$

따라서 $f(1) = 5$ 이다.

35. 함수 $f(x) = ax + b$ 가 $f(0) = 0$, $f(1) \leq f(100)$, $f(100) \geq f(10000)$ 을 만족할 때, $f(999)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(1) \leq f(100)$ 에서 $a + b \leq 100a + b$ 이므로 $a \geq 0$
 $f(100) \geq f(10000)$ 에서 $100a + b \geq 10000a + b$ 이므로 $a \leq 0$

$$\therefore a = 0$$

또한, $f(0) = b = 0$ 에서 $b = 0$

따라서 $f(x) = 0$ 이므로 $f(999) = 0$ 이다.

36. 직선 $y = 3$ 과 수직으로 만나고 $(-1, 5)$ 를 지나는 직선의 그래프가 $(a-3)x + (2b+2)y - 4 = 0$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = 3$ 과 수직으로 만나려면 주어진 일차방정식의 y 계수가 0 이 되어야 하고 $(-1, 5)$ 를 지나므로
 $2b + 2 = 0 \quad \therefore b = -1$
 $(a-3)(-1) - 4 = 0 \quad \therefore a = -1$
 $\therefore a - b = 0$

37. 일차방정식 $(p-2)x + (3+2q)y - 2 = 0$ 의 그래프가 점 $(1, 3)$ 을 지나고 직선 $x = 2$ 와 평행할 때, 상수 p, q 를 각각 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $p = 4$

▷ 정답 : $q = -\frac{3}{2}$

해설

직선 $x = 2$ 와 평행하므로
 $3 + 2q = 0 \quad \therefore q = -\frac{3}{2}$
 $(p-2)x - 2 = 0$ 에서
 $x = \frac{2}{p-2}$ 이고, 점 $(1, 3)$ 을 지나므로
 $\frac{2}{p-2} = 1, p-2 = 2 \quad \therefore p = 4$
따라서 $p = 4, q = -\frac{3}{2}$ 이다.

38. 어느 공장에서 장난감 자동차를 생산하는 데 드는 비용을 조사했더니 처음 5개까지는 고정적으로 100 원의 비용이 들고 그 이후에는 개당 12 원의 비용이 든다고 한다. 이 공장에서 하루에 생산 가능한 장난감 자동차의 개수는 30 개이다. 공장에서 하루 동안 만든 장난감 자동차의 개수를 x 개, 만드는 데 드는 비용을 y 원로 하는 식을 좌표평면의 그래프로 나타낼 때, 이 그래프와 x 축이 이루는 도형의 넓이를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6750

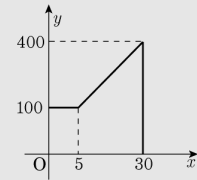
해설

(1) $0 \leq x \leq 5$ 일 때, $y = 100$

(2) $5 < x \leq 30$ 일 때, $y = 100 + 12(x-5)$

$\therefore y = 12x + 40$

이 그래프와 x 축과 $x = 30$ (x 의 최대값) 이루는 도형은 아래 그림과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는 $5 \times 100 + \frac{1}{2} \times \{(100 + 400) \times 25\} = 6750$ 이다.

39. 어느 회사의 미국 통화 요금은 기본 30 초까지는 통화 시간에 관계없이 200 원을 부과하고, 이후 초과되는 통화시간에 대해 초당 10 원을 부과한다. 통화 시간을 x 초, 요금을 y 원로 하는 식을 좌표평면의 그래프로 나타낼 때, 이 그래프와 x 축과 $x = 120$ 이 이루는 도형의 넓이를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: 64500

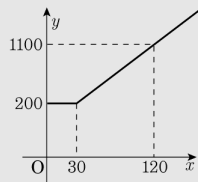
해설

(1) $0 \leq x \leq 30$ 일 때, $y = 200$

(2) $x > 30$ 일 때, $y = 200 + 10(x - 30)$

$\therefore y = 10x - 100$

이 그래프와 x 축과 $x = 120$ 이 이루는 도형은 아래 그림과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는 $30 \times 200 + \frac{1}{2} \times \{(200 + 1100) \times 90\} = 64500$ 이다.

40. 두 직선 $y = |x + 3| + 2|x - 1| + 1$ 과 $y = ax - 1$ 의 교점이 없기 위한 a 의 값의 범위를 구하여라.

[배점 5, 상하]

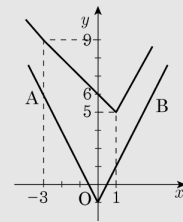
▶ 답:

▶ 답:

▶ 정답: $-3 < a < 3$

▶ 정답: $3 > a > -3$

해설



$y = |x + 3| + 2|x - 1| + 1$ 의 그래프가 위와 같으므로

$y = ax - 1$ 이 직선 A 와 직선 B 사이에 있을 때, 두 그래프가 만난다.

직선 A 의 기울기는 $x < -3$ 일 때,

$y = |x + 3| + 2|x - 1| + 1$ 의 기울기와 같으므로 -3

직선 B 의 기울기는 $x > 1$ 일 때,

$y = |x + 3| + 2|x - 1| + 1$ 의 기울기와 같으므로 3

$\therefore -3 < a < 3$

41. $1 \leq x \leq 5$ 일 때, 함수 $f(x) = |-x+1|+1$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

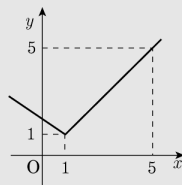
해설

$$f(x) = |-x+1|+1 \text{ 는}$$

$$1) -x+1 \geq 0 \text{ 일 때, } x \leq 1, y = -x+2$$

$$2) -x+1 < 0 \text{ 일 때, } x > 1, y = x$$

이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $1 \leq x \leq 5$ 일 때,
최댓값은 $f(5) = 5$, 최솟값은 $f(1) = 1$ 이므로
최댓값과 최솟값의 합은 6 이다.

42. $-1 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $f(x) = |x-2|+x$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 : 4

▷ 정답 : 최솟값 : 2

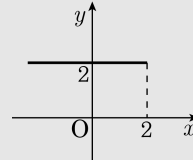
해설

$$f(x) = |x-2|+x \text{ 는}$$

$$1) x \geq 2 \text{ 일 때, } y = 2x-2$$

$$2) x < 2 \text{ 일 때, } y = 2$$

이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $-1 \leq x \leq 3$ 일 때, 최댓값은 $f(3) = 4$,
최솟값은 $f(-1) = 2$ 이다.

43. 두 직선 $y = |x| - 2$ 와 $y = -a$ 가 만나지 않을 때, a 값의 범위를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a > 2$

▷ 정답 : $2 < a$

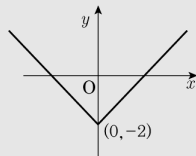
해설

$y = |x| - 2$ 의 그래프는

1) $x \geq 0$ 일 때, $y = x - 2$

2) $x < 0$ 일 때, $y = -x - 2$

이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $y = -a$ 가 $y = |x| - 2$ 의 그래프와 만나지 않는다면, $-a < -2$ 이므로 $a > 2$ 이다.

44. 직선 $y = m(2 - x) + 3$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 후, x 축에 대하여 대칭이동한 직선이 원점을 지나는 직선이 될 때, 상수 m 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{5}{2}$

해설

$y = m(2 - x) + 3$ 을 y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하므로

$$y = -mx + 2m + 3 + 2 = -mx + 2m + 5$$

또한, 이 직선을 x 축에 대하여 대칭이동하면 y 대신 $-y$ 를 대입하므로

$$-y = -mx + 2m + 5$$

$$\therefore y = mx - 2m - 5$$

이 직선이 원점을 지나는 직선이 되려면 y 절편이 0 이어야 하므로 $-2m - 5 = 0$

$$\therefore m = -\frac{5}{2}$$

45. 직선 $y = px + 2p - 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 후, y 축에 대하여 대칭이동한 직선이 원점을 지날 때, 상수 p 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :
▷ 정답 : 1

해설

$y = px + 2p - 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하면
 $y = p(x - 1) + 2p - 1$ 이므로 $y = px + p - 1$
 또, y 축에 대하여 대칭이동하면 $y = -px + p - 1$
 이 그래프가 원점을 지나면 y 절편이 0 이 되어야 하므로 $0 = p - 1$
 $\therefore p = 1$

46. 일차함수 $y = ax + 6$ 의 그래프가 $-1 \leq x < 3$ 의 범위에서 항상 $y > 0$ 일 때, a 값의 범위를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :
▶ 답 :
▷ 정답 : $-2 < a < 6$
▷ 정답 : $6 > a > -2$

해설

일차함수의 그래프는 증가하거나 감소하는 그래프이므로 $-1 \leq x < 3$ 의 범위에서 항상 $y > 0$ 이려면 $x = -1$ 일 때 $y > 0$ 이고, $x = 3$ 일 때 $y > 0$ 이어야 한다.
 $-a + 6 > 0, 3a + 6 > 0$
 $\therefore -2 < a < 6$

47. $(-2, 0), (0, 6)$ 를 지나는 일차함수의 그래프가 점 (m, m) 을 지날 때, m 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :
▷ 정답 : -3

해설

$y = ax + b$ 의 그래프가 $(0, 6)$ 을 지나므로
 $6 = a \times 0 + b$ 에서 $b = 6$
 또한, $y = ax + 6$ 의 그래프가 $(-2, 0)$ 을 지나므로
 $0 = -2a + 6$ 에서 $a = 3$
 따라서 $y = 3x + 6$ 의 그래프가 (m, m) 을 지나므로
 $x = m, y = m$ 을 대입하면 $m = 3m + 6$ 이다.
 $\therefore m = -3$

48. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하였더니 $y = -3x - 7$ 의 그래프와 일치하였다. 이때, 상수 $a - b$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :
▷ 정답 : 14

해설

$y = ax + b$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3 만큼, y 축 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로
 $y = a(x - 3) + b + 1 = ax - 3a + b + 1$
 이것이 $y = -3x - 7$ 의 그래프와 일치하므로
 $a = -3, b = -17$
 $\therefore a - b = 14$

49. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -2 만큼, y 축 방향으로 -3 만큼 평행이동한 그래프가 $y = 2x + 4$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$y = ax + b$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -2 만큼, y 축 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이므로
 $y = a(x + 2) + b - 3 = ax + 2a + b - 3$
 이것이 $y = 2x + 4$ 의 그래프와 일치하므로 $a = 2$
 $2a + b - 3 = 4$ 에서 $b = 3$
 $\therefore a + b = 5$

50. 일차함수 $y = 2ax + 1$ 이 $b \leq x \leq 6$ 인 범위에서 $-1 \leq y \leq 3$ 일 때, ab 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : -1

해설

- 1) $a > 0$ 일 때, x 의 값이 증가함에 따라 y 의 값도 증가하므로 일차함수 $y = 2ax + 1$ 은 두 점 $(b, -1)$, $(6, 3)$ 을 지난다.

$$\begin{cases} -1 = 2ab + 1 \\ 3 = 12a + 1 \end{cases}$$

$$\therefore a = \frac{1}{6}, b = -6$$

$$\therefore ab = -1$$

- 2) $a < 0$ 일 때, x 의 값이 증가함에 따라 y 의 값은 감소하므로 일차함수 $y = 2ax + 1$ 은 두 점 $(b, 3)$, $(6, -1)$ 을 지난다.

$$\begin{cases} 3 = 2ab + 1 \\ -1 = 12a + 1 \end{cases}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{6}, b = -6$$

$$\therefore ab = 1$$

따라서 ab 의 값은 1 또는 -1 이다.

51. 일차함수 $y = ax - 1$ 이 $1 \leq x \leq b$ 인 범위에서 $0 \leq y \leq 4$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

1) $a > 0$ 일 때,

x 의 값이 증가함에 따라 y 의 값도 증가하므로 일차함수 $y = ax - 1$ 은 두 점 $(1, 0)$, $(b, 4)$ 를 지난다.

$$0 = a - 1$$

$$4 = ab - 1$$

$$\therefore a = 1, b = 5$$

2) $a < 0$ 일 때,

x 의 값이 증가함에 따라 y 의 값은 감소하므로 일차함수 $y = ax - 1$ 은 두 점 $(1, 4)$, $(b, 0)$ 을 지난다.

$$4 = a - 1$$

$$0 = ab - 1$$

$$\therefore a = 5, b = \frac{1}{5} \text{ (그러나 } a < 0 \text{ 인 조건에 만족하지 못하므로 적합하지 않다.)}$$

따라서 $a + b$ 의 값은 6 이다.

52. 두 직선 $y = x + b$, $y = ax + 6$ 이 한 점 $(2, 4)$ 에서 만날 때, a, b 의 값을 각각 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -1$

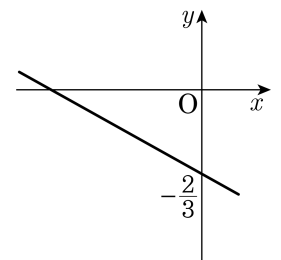
▷ 정답 : $b = 2$

해설

$x = 2, y = 4$ 를 $y = x + b$ 에 대입하면 $4 = 2 + b$ 이므로 $b = 2$ 이고

$y = ax + 6$ 에 대입하면 $4 = 2 \times a + 6$ 이므로 $a = -1$ 이다.

53. 일차방정식 $5x + 6y - 4a = 0$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, a 의 값을 구하여라.



[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$y = -\frac{5}{6}x + \frac{4a}{6}$$

$$\frac{4a}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$a = -1$$

54. 일차함수 $y = ax + b$ 의 x 절편이 -2 , y 절편이 4 일 때, 일차함수 $y = \frac{b}{a}x + ab$ 의 x 절편과 y 절편의 합을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 4

해설

$$y = 2x + 4$$

$$a = 2, b = 4$$

$$y = \frac{b}{a}x + ab = 2x + 8$$

$$x \text{ 절편} : -4, y \text{ 절편} : 8$$

$$\therefore -4 + 8 = 4$$

55. 직선 $y = ax + b$ 는 점 $(3, 6)$ 을 지나고 $y = 3x - 9$ 와 y 축 위에서 만난다. 이 때, $a - b$ 의 값은?

[배점 6, 상중]

- ① 14 ② 13 ③ 12 ④ 11 ⑤ 10

해설

$y = 3x - 9$ 와 y 축에서 만난다는 것은 y 절편이 같다는 뜻이다.

그러므로 $y = ax - 9$ 이다.

$$6 = 3a - 9$$

$$3a = 15$$

$$a = 5, b = -9$$

$$\therefore a - b = 5 - (-9) = 14$$

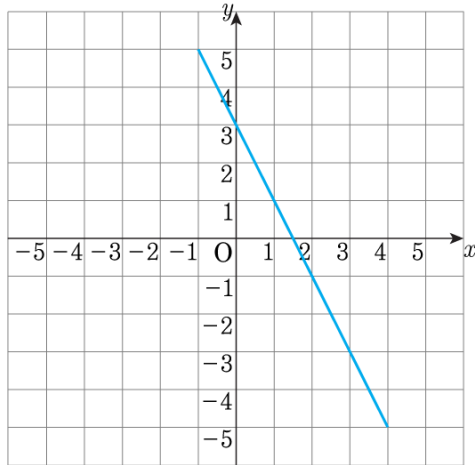
56. 일차함수 $y = -9x + 6$ 과 $y = 3ax - b$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은? [배점 6, 상중]

- ① 두 직선이 서로 일치 할 조건은 $b = -6$ 이다.
 ② $a = 3$ 이면 두 직선은 서로 평행하다.
 ③ $a = -3, b = -6$ 이면 두 직선은 서로 일치한다.
 ④ 두 직선은 서로 평행하거나 일치할 수 없다.
 ⑤ 두 직선이 서로 평행 할 조건은 $a = -6$ 이다.

해설

두 직선이 서로 평행하려면 기울기만 같으면 되고, 두 직선이 서로 일치하려면 기울기와 y 절편의 값 모두 같아야 한다. 따라서 $3a = -9, a = -3$ 이면 두 직선은 평행하고 $a = -3, b = -6$ 이면 두 직선이 일치한다.

57. 일차함수 $y = ax + 3$ 의 그래프가 다음 그래프와 서로 평행할 때, a 의 값을 구하여라.



[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : -2

해설

두 그래프의 기울기가 같으면 서로 평행하다. 주어진 그래프에서 기울기는 $\frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})} = \frac{-2}{1} = -2$ 이므로 $a = -2$ 이다.

58. 두 점 $(2, -4)$, $(-1, 7)$ 을 지나는 직선이 y 축과 만나는 점을 A라고 할 때, 점 A의 y 좌표를 고르면?

[배점 6, 상중]

- ① 2 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{11}{3}$

해설

기울기는 $\frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}$ 이므로

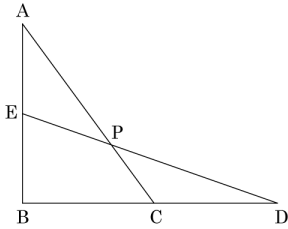
$\frac{7 - (-4)}{-1 - 2} = \frac{11}{-3} = -\frac{11}{3}$ 이다. $y = ax + b$ 에서

$y = -\frac{11}{3}x + b$ 이므로 $(2, -4)$ 를 대입하면

$-4 = -\frac{22}{3} + b$, $b = \frac{10}{3}$ 이고, 따라서 이 직선의

일차함수의 식은 $y = -\frac{11}{3}x + \frac{10}{3}$ 이다. 이 직선의 y 절편은 $\frac{10}{3}$ 이다.

59. 다음 그림의 삼각형 ABC, BDE 에서 $\angle ABD = 90^\circ$ 이고, 점 E는 선분 AB의 중점, 점 P는 변 AC와 DE의 교점이다. 사각형 PCBE의 넓이는 삼각형 PAE, PCD의 넓이의 합과 같고, $\frac{BD}{EB} = k$ 일 때, $\frac{BC}{AB}$ 의 값을 k 를 사용한 식으로 나타내어라.

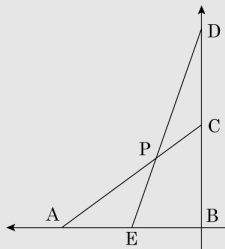


[배점 6, 상중]

▶ 답 :
▶ 정답 : $\frac{k}{4}$

해설

주어진 도형을 다음 그림과 같이 점 B가 좌표평면의 원점에 오도록 그래프를 옮기고 $\overline{AE} = \overline{EB} = a$ 라 하면



선분 $\overline{ED}$ 의 기울기 = $\frac{BD}{EB} = k$ 이므로
 $\overline{BD} = ak$
 한편 $\overline{AE} = \overline{EB}$ 이므로 $\triangle PAE = \triangle PEB$
 또, $\triangle PAE + \triangle PDC = \triangle PCBE$ 이므로
 $\triangle PCD = \triangle PBC$
 $\therefore \overline{CB} = \overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2}ak$
 $\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{1}{2}ak}{2a} = \frac{k}{4}$

60. 일차함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $2 \leq f(2) \leq 4$, $7 \leq f(3) \leq 11$ 를 만족하는 a 의 값이 최대일 때, $f(x)$ 의 그래프의 x 절편을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :
▶ 정답 : $\frac{16}{9}$

해설

$2 \leq f(2) \leq 4$ 이므로 $2 \leq 2a + b \leq 4 \dots \textcircled{1}$

$7 \leq f(3) \leq 11$ 이므로 $7 \leq 3a + b \leq 11 \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 을 하면 $3 \leq a \leq 9$

즉 a 의 최댓값이 9 이므로 $2a + b = 2$ 에 $a = 9$ 를 대입하면 $b = -16$

$\therefore f(x) = 9x - 16$

따라서 일차함수 $y = f(x)$ 의 x 절편은 $\frac{16}{9}$ 이다.

61. 일차함수 $f(x) = px + q$ 의 그래프는 x 값이 4 만큼 증가할 때 y 의 값은 k 만큼 증가하고 x 값이 1 에서 10 으로 변할 때, y 의 값은 r 만큼 증가한다. 또한 실수 a, b 에 대하여 다음 식을 만족할 때, kr 의 값을 구하여라.

$$\frac{f(a) - f(b)}{3} = \frac{b}{2} - \frac{a}{2}$$

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 81

해설

$$\frac{f(a) - f(b)}{3} = \frac{b}{2} - \frac{a}{2} \text{ 에서}$$

$$2f(a) - 2f(b) = 3b - 3a$$

$$2f(a) - f(b) = -3(a - b)$$

$$\therefore \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = -\frac{3}{2}$$

즉, 이 직선의 기울기 $p = -\frac{3}{2}$ 이다.

따라서, x 값이 4 만큼 증가할 때 y 의 값은 k 만큼 증가하므로 $\frac{k}{4} = -\frac{3}{2} \therefore k = -6$

또한, x 값이 9 만큼 증가할 때 y 의 값은 r 만큼 증가하므로 $\frac{r}{9} = -\frac{3}{2} \therefore r = -\frac{27}{2}$

$$\therefore kr = (-6) \times \left(-\frac{27}{2}\right) = 81$$

62. y 는 일차함수 $y = ax + b$ 로 나타내고, x 는 t 에 대한 일차함수 $x = mt + n$ 으로 나타낼 수 있다. t 가 t_0 에서 $t_0 + 4$ 로 증가하면 이에 대응하는 y 값은 y_0 에서 $y_0 + 8$ 로 증가할 때, am 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 2

해설

$y = ax + b$ 에 $x = mt + n$ 를 대입하면

$$y = a(mt + n) + b$$

$$y = amt + an + b \dots \textcircled{1}$$

①에서 t 가 t_0 에서 $t_0 + 4$ 로 증가하면

y 의 증가량은

$$(amt_0 + 4am + an + b) - (amt_0 + an + b) = 4am$$

y 값은 y_0 에서 $y_0 + 8$ 로 증가할 때, y 의 증가량은 8 이므로

$$4am = 8$$

$$\therefore am = 2$$

63. 점 (x, y) 를 점 $(2x, -y)$ 로 이동시키는 규칙에 따라 다음 세 점을 각각 이동시킨 세 점이 한 직선 위에 존재한다. 이때, a 의 값을 구하여라.

$$O(0, 0), A(2, -4), B(a, 3)$$

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : $-\frac{3}{2}$

해설

점 (x, y) 를 점 $(2x, -y)$ 로 이동시키는 규칙에 따라 이동한 점을 각각 O' , A' , B' 이라 하면 각각 $O'(0, 0)$, $A'(4, 4)$, $B'(2a, -3)$ 이다.

한 직선 위의 두 점의 기울기는 같으므로 두 점 O' , A' 을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{4-0}{4-0} = 1$

두 점 A' , B' 을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{-3-4}{2a-4} = \frac{-7}{2a-4}$
즉, $\frac{-7}{2a-4} = 1$ 이므로 $a = -\frac{3}{2}$ 이다.

64. $f : A(x, y) \rightarrow B(ax - y, x + 2y)$ 의 규칙으로 세 점 $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ 을 이동시키면 이동한 점이 일직선 위에 있게 된다. 이때, a 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : $-\frac{1}{2}$

해설

$$(0, 0) \rightarrow (0, 0)$$

$$(1, 2) \rightarrow (a - 2, 5)$$

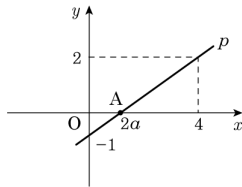
$$(2, 3) \rightarrow (2a - 3, 8)$$

세 점이 일직선 위에 있으므로 기울기가 같다.

$$\frac{5-0}{a-2-0} = \frac{8-5}{2a-3-a+2}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

65. 다음 그림과 같은 직선 p 위의 점 A 와 점 $B(6a, -3a)$ 를 지나는 다른 직선을 나타내는 일차함수의 관계식이 $y = mx + n$ 일 때, 상수 m, n 의 값을 구하여라.



[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = -\frac{3}{4}$

▷ 정답 : $n = 1$

해설

직선 p 의 y 절편은 -1 이므로 직선 p 를 $y = Ax - 1$ 이라 할 때, $(4, 2)$ 를 지나므로 대입하면

$$2 = 4A - 1, A = \frac{3}{4}$$

즉, $y = \frac{3}{4}x - 1$ 은 점 $A(2a, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{3}{4} \times 2a - 1, a = \frac{2}{3}$$

$$\therefore A(2a, 0) = \left(\frac{4}{3}, 0\right), B(6a, -3a) = (4, -2)$$

$y = mx + n$ 이 두 점 A, B 를 지나므로

$$\left(\frac{4}{3}, 0\right) \text{ 을 대입하면 } 0 = \frac{4}{3}m + n$$

$$(4, -2) \text{ 를 대입하면 } -2 = 4m + n$$

따라서 두 식을 연립하면 $m = -\frac{3}{4}, n = 1$ 이다.

66. 양 끝점의 좌표가 $A(9, 25), B(106, 658)$ 인 선분 AB 위에 있는 점 (m, n) 중 m, n 이 모두 자연수인 점의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2 개

해설

(m, n) 을 점 C 라고 하면 점 A, B, C 는 모두 한 직선 위에 있고

$$\overline{AB} \text{ 의 기울기는 } \frac{658 - 25}{106 - 9} = \frac{633}{97} \text{ 이므로}$$

$$\overline{AC} \text{ 의 기울기는 } \frac{n - 25}{m - 9} = \frac{633}{97}$$

이때, $n - 25 = 633k, m - 9 = 97k$ 로 놓으면

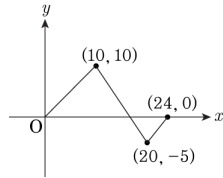
(단, $k \neq 0$)

$$m = 97k + 9 \text{ 에서 } m = 9, 106$$

$$n = 633k + 25 \text{ 에서 } n = 25, 633$$

따라서 조건을 만족하는 $C(m, n)$ 은 $(9, 25), (106, 633)$ 의 2 개이다.

67. 정의역이 $0 \leq x \leq 24$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다. $f(x) = f(x+4)$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.



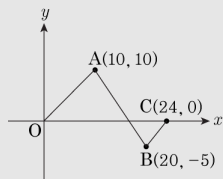
[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{38}{5}$
▶ 정답 : $\frac{200}{11}$

해설



직선 OA 의 방정식 $f_1(x) = x \cdots \text{㉠}$

직선 AB 의 방정식 $f_2(x) = -\frac{3}{2}x + 25 \cdots \text{㉡}$

직선 BC 의 방정식 $f_3(x) = \frac{5}{4}x - 30 \cdots \text{㉢}$

$f(x) = f(x+4)$ 이므로

1) ㉠, ㉡에서 $f_1(x) = f_2(x+4)$ 이 성립한다.

$$f_1(x) = x$$

$$f_2(x+4) = -\frac{3}{2}(x+4) + 25 \text{ 이므로}$$

$$x = -\frac{3}{2}(x+4) + 25$$

$$\therefore x = \frac{38}{5}$$

2) ㉡, ㉢에서 $f_2(x) = f_3(x+4)$ 이 성립한다.

$$f_2(x) = -\frac{3}{2}x + 25$$

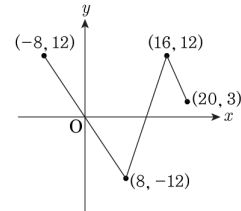
$$f_3(x+4) = \frac{5}{4}(x+4) - 30 \text{ 이므로}$$

$$-\frac{3}{2}x + 25 = \frac{5}{4}(x+4) - 30$$

$$\therefore x = \frac{200}{11}$$

따라서 x 의 값은 $\frac{38}{5}$ 또는 $\frac{200}{11}$ 이다.

68. 정의역이 $-8 \leq x \leq 20$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다. $f(k-3) = f(k+3)$ 을 만족하는 k 의 값을 구하여라.



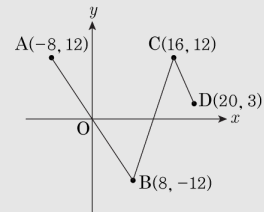
[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{15}{2}$
▶ 정답 : $\frac{99}{5}$

해설



직선 AB 의 방정식 $y = -x \cdots \text{㉠}$

직선 BC 의 방정식 $y = 3x - 36 \cdots \text{㉡}$

직선 CD 의 방정식 $y = -\frac{9}{4}x + 48 \cdots \text{㉢}$

$f(k-3) = f(k+3)$ 에서 $k-3 = x$ 일 때,

$f(x) = f(x+6)$ 이므로

1) ㉡에 x 대신 $x+6$ 을 대입하면

$$y = 3x - 18 \cdots \text{㉣}$$

㉠, ㉣의 값이 같으므로

$$-x = 3x - 18, x = \frac{18}{4} \therefore k = \frac{15}{2}$$

2) ㉢에 x 대신 $x+6$ 을 대입하면

$$y = -\frac{9}{4}x + 21 \cdots \text{㉤}$$

㉠, ㉤의 값이 같으므로

$$-x = -\frac{9}{4}x + 21, x = \frac{84}{5} \therefore k = \frac{99}{5}$$

따라서 k 의 값은 $\frac{15}{2}$ 또는 $\frac{99}{5}$ 이다.

69. 일차함수 $y = mx - 1$ 의 그래프의 정의역과 치역이 모두 집합 $A = \{x \mid 0 \leq x \leq n\}$ 와 같을 때, $m + n$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : -2

해설

$x = 0$ 일 때 $y = -1$, $x = n$ 일 때 $y = mn - 1$ 이므로

1) $m > 0$ 일 때, $-1 \leq y \leq mn - 1$ 이므로 $0 \leq x \leq n$ 와 일치할 수 없다.

2) $m < 0$ 일 때, $mn - 1 \leq y \leq -1$ 이므로 $0 \leq x \leq n$ 와 일치하려면 $mn - 1 = 0$, $n = -1$
 $\therefore n = -1$, $m = -1$

따라서 1), 2)에 의해 $m + n = -2$ 이다.

70. 두 직선 $\begin{cases} 3x + 3y = -5 \\ 6x + 4y = -2 \end{cases}$ 의 교점을 지나고, 직선 $3x + 5y + 1 = 0$ 과 평행한 직선의 x 절편을 구하여라. [배점 6, 상상]

▶ 답 :

▶ 정답 : $-\frac{13}{3}$

해설

$$\begin{cases} 6x + 6y = -10 \\ 6x + 4y = -2 \end{cases}$$

$$\therefore y = -4, x = \frac{7}{3}$$

$3x + 5y + 1 = 0$ 과 평행한 직선이므로 기울기는 $-\frac{3}{5}$ 이다.

$$y = -\frac{3}{5}x + b \text{ 에 } \left(\frac{7}{3}, -4\right)$$

$$-4 = -\frac{7}{5} + b$$

$$\therefore b = -\frac{13}{5}$$

따라서 $y = -\frac{3}{5}x - \frac{13}{5}$ 의 x 절편은 $\frac{13}{5} = -\frac{3}{5}x$,
 $x = -\frac{13}{3}$ 이다.