

집합의 뜻과 포함관계 확인학습 추가

1. 다음 중 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$ 의 부분집합인 것을 고르면? [배점 3, 하상]

- ① $\{0, 2\}$ ② $\{1, 4\}$ ③ $\{1, 2, 6\}$
 ④ $\{1, 3, 5\}$ ⑤ $\{4, 5, 6\}$

해설

$A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 3, 6\}$
 따라서 $\{1, 2, 6\} \subset A$ 이다.

2. 집합 $\{1, 3, 5, 7\}$ 에서 원소 1 을 포함하고 5 를 포함하지 않는 부분집합의 개수는? [배점 3, 하상]

- ① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개
 ④ 6 개 ⑤ 8 개

해설

$2^{(1, 5 \text{를 뺀 원소의 개수})} = 2^{4-2} = 2^2 = 4(\text{개})$

3. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$, $B = \{a, b, \{c, \emptyset\}\}$ 일 때, $n(A) + n(B)$ 를 구하여라.

[배점 3, 하상]

▶ 답:

▶ 정답: 7

해설

$A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로
 $n(A) = 4$ 이고, $n(B) = 3$ 이므로 $n(A) + n(B) = 7$ 이다.

4. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 2 개인 부분집합의 개수를 구하여라.

[배점 3, 하상]

▶ 답:

▶ 정답: 6 개

해설

집합 A 의 원소 2 개를 짝짓는 방법은
 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\},$
 $\{2, 3\}, \{2, 4\},$
 $\{3, 4\}$
 따라서, 원소가 2 개인 부분집합의 개수는
 $3 + 2 + 1 = 6(\text{개})$ 이다.

5. 집합 $X = \{x \mid x \text{는 } 4\text{보다 작은 자연수}\}$ 의 부분집합 중에서 그 원소의 개수가 1 개인 것의 개수와 원소의 개수가 2 개인 것의 개수의 합을 구하여라.

[배점 3, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: 6개

해설

$$X = \{1, 2, 3\}$$

원소의 개수가 1 개인 X 의 부분집합 :

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}$$

원소의 개수가 2 개인 X 의 부분집합 :

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$$

따라서 $3 + 3 = 6$

6. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 일 때, 다음 중 A 의 부분집합이 아닌 것은? [배점 3, 하상]

① $\{1\}$

② $\emptyset$

③ $\{1, 2, 4\}$

④ $\{0\}$

⑤ $\{1, 2, 3, 4\}$

해설

집합 A 의 부분집합을 구하면

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\},$$

$$\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\},$$

$$\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$$

7. 9보다 작은 짝수의 집합을 A 라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은? [배점 3, 하상]

① $1 \in A$

② $3 \notin A$

③ $4 \in A$

④ $5 \notin A$

⑤ $6 \in A$

해설

집합 A 를 원소나열법으로 나타내면 $A = \{2, 4, 6, 8\}$ 이다. 따라서 $1 \notin A$

8. 두 집합

$$A = \{x \mid x \text{는 } 10\text{보다 작은 홀수}\},$$

$$B = \{a, 3, 5, 7, b\}$$

에 대하여 $A = B$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \text{ 이고}$$

$$B = \{a, 3, 5, 7, b\} \text{ 이므로}$$

$$a = 1, b = 9 \text{ 또는 } a = 9, b = 1 \text{ 이므로}$$

$$a + b = 10$$

9. 48에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱하여야 할 가장 작은 자연수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

48을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 48} \\ 2 \overline{) 24} \\ 2 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 6} \\ 3 \end{array}$$

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로 $2^4 \times 3 \times \square$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 $\square$ 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 3이다.

10. 집합 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 1, 2를 포함하지 않는 부분집합의 개수가 8개일 때, 자연수 n 의 값은? [배점 4, 중중]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$2^{(1, 2\text{를 제외한 원소의 개수})} = 2^{n-2} = 8 = 2^3 \quad \therefore n = 5$$

11. 집합 A 의 진부분집합의 개수가 15개일 때, $n(A)$ 를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

진부분집합은 자기 자신을 제외한 모든 부분집합
이므로, 진부분집합의 수 = 부분집합의 수 - 1 이 된다. 따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는 $15 + 1 = 16$ 개이며, $2^n = 16 \quad \therefore n = 4$ 이다.

12. 다음 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

- ㉠ $\{0\} \subset \{0, 1\}$ ㉡ $\emptyset \in \{\emptyset\}$
㉢ $1 \in \{1, 2\}$ ㉣ $\emptyset \subset \{\emptyset, 0\}$
㉤ $\{a\} \subset \{a, b\}$

[배점 4, 중중]

① 1개 ② 2개 ③ 3개
④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤ 모두 옳다.

13. 두 집합 A, B 에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?
[배점 4, 중중]

- ① $A \subset B$ 이면 $n(A) < n(B)$ 이다.
- ② $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.
- ③ $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이다.
- ④ $n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$ 이다.
- ⑤ $n(A) \leq n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.

해설

- ① $A \subset B$ 이면 $n(A) \leq n(B)$ 이다.
- ② : (반례) $A = \{1\}, B = \{2, 3\}$
- ④ : (반례) $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}$
- ⑤ : (반례) $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4, 5\}$

14. 두 집합 $A = \{1, 2, a, 6\}, B = \{2, b, 3, 1\}$ 에 대하여
 $A = B$ 일 때, $a + b$ 의 값은? [배점 4, 중중]

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$A = B$ 이므로 $a = 3, b = 6$
 $\therefore a + b = 9$

15. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$ 의 부분집합 중 원소의
개수가 4 개인 집합의 개수를 구하여라.
[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 15 개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

따라서 원소가 4 개인 A 의 부분집합은

$\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 3, 12\},$
 $\{1, 2, 4, 6\}, \{1, 2, 4, 12\}, \{1, 2, 6, 12\},$
 $\{1, 3, 4, 6\}, \{1, 3, 4, 12\}, \{1, 3, 6, 12\},$
 $\{1, 4, 6, 12\}, \{2, 3, 4, 6\}, \{2, 3, 4, 12\},$
 $\{2, 3, 6, 12\}, \{2, 4, 6, 12\}, \{3, 4, 6, 12\}$
15 개다.

16. 다음 중에서 집합인 것을 모두 고르면? (정답 2 개)
[배점 4, 중중]

- ① 키가 작은 학생들의 모임
- ② 10 에 가까운 수의 모임
- ③ 우리 반에서 배우는 교과목의 모임
- ④ 영어를 잘하는 학생들의 모임
- ⑤ 1 보다 작은 자연수의 모임

해설

③, ⑤는 기준이 명확하므로 집합이다.

17. 10의 약수의 집합을 A 라고 할 때, 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개) [배점 4, 중중]

- ① $1 \in A$ ② $3 \in A$ ③ $4 \notin A$
 ④ $5 \in A$ ⑤ $6 \in A$

해설

집합 A 의 원소는 1, 2, 5, 10 이므로 3, 4, 6은 집합 A 의 원소가 아니다. 따라서

- ① $3 \notin A$
 ⑤ $6 \notin A$ 이다.

18. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 수를 모두 골라라.

2, 3, 9, 11, 15, 18

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 3

▷ 정답: 9

해설

$A \subset B$ 이면 $\square$ 는 9의 약수이어야 한다. 따라서, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 수는 1, 3, 9 중 하나이며 보기 중에는 3, 9이다.

19. 두 집합 $A = \{1, 2, \{3, 4\}, \{5, 6, 7\}\}$, $B = \{0, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ 에 대하여 $n(A) - n(B)$ 를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

집합 안에 집합이 포함되어 있을 경우 포함된 집합을 하나의 원소로 여기어 원소의 개수를 센다. 따라서 $n(A) = 4$, $n(B) = 3$ 이고, $n(A) - n(B) = 1$ 이다.

20. 세 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 1 \text{을 제외한 } 4 \text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 짝수}\}$, $X = \{2, 4, 6, \dots, n\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 일 때, n 의 최댓값과 최솟값의 차는? [배점 5, 중상]

- ① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

해설

$A \subset X \subset B$ 이므로, $A = X$ 일 때, n 이 최솟값을 갖고, $X = B$ 일 때, n 이 최댓값을 갖는다.

따라서 $A = \{2, 4\} = X$, $n = 4$ (최솟값)

$B = \{2, 4, 6, \dots, 20\} = X$, $n = 20$ (최댓값)

$\therefore 20 - 4 = 16$

21. 세 개의 원소로 된 집합 $A = \{1, 3, 4\}$ 에서 조건 $X \subset Y \subset A$ 를 만족하는 집합 X, Y 를 만들 수 있는 경우의 수는? (단, 집합 X 의 원소의 개수는 1 개 이상이다.) [배점 5, 중상]

- ① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

해설

- (i) $X = \{1\}$ 일 때 집합 Y 는 원소 1 을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 개수는 $2^2 = 4$ (개)
 $X = \{3\}$, $X = \{4\}$ 일 때도 마찬가지로 $3 \times 4 = 12$ (개)
(ii) $X = \{1, 3\}$ 일 때 집합 Y 는 원소 1, 3 을 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 개수는 $2^1 = 2$ (개)
 $X = \{1, 4\}$, $X = \{3, 4\}$ 일 때도 마찬가지이므로 $2 \times 3 = 6$ (개)
(iii) $X = \{1, 3, 4\}$ 일 때 $Y = \{1, 3, 4\}$ 뿐이므로 1 개
 $\therefore 19$ 개

22. 세 개의 원소로 된 집합 $A = \{a, b, c\}$ 에서 조건 $X \subset Y \subset A$ 를 만족하는 집합 X, Y 를 만들 수 있는 경우는 모두 몇 가지인지 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 27 개

해설

- (i) $X = \emptyset$ 일 때, 집합 Y 는 집합 A 의 모든 부분집합이므로 $2^3 = 8$ (개)
(ii) $X = \{a\}$ 일 때 집합 Y 는 원소 a 를 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 개수는 $2^2 = 4$
 $X = \{b\}$, $X = \{c\}$ 일 때도 마찬가지이므로 $3 \times 4 = 12$ (개)
(iii) $X = \{a, b\}$ 일 때 집합 Y 는 a, b 를 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 개수는 $2^1 = 2$ (개)
 $X = \{a, c\}$, $X = \{b, c\}$ 일 때도 마찬가지이므로 $2 \times 3 = 6$ (개)
(iv) $X = \{a, b, c\}$ 일 때 $Y = \{a, b, c\}$ 뿐이므로 1 (개)
 $\therefore 27$ 개

23. 집합 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ 이고 집합 A 에 속하는 임의의 원소 a, b 에 대하여 $a * b = a + b$ ($a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$) 로 정의할 때, 집합 $B = \{x \mid x = a * b, a \in A, b \in A\}$ 의 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :
▶ 정답 : 64 개

해설

$b \backslash a$	-1	1	2
-1	-2	0	1
1	0	2	3
2	1	3	4

표에 의하여 $B = \{-2, 0, 1, 2, 3, 4\}$ 이므로 집합 B 의 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$ (개) 이다.

24. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } n \text{보다 큰 } 4 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $8 \notin A$ 이고 $12 \in A$ 를 만족하는 모든 자연수 n 의 합을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :
▶ 정답 : 38

해설

4의 배수 4, 8, 12, ... 에서 8은 포함하지 않고 12는 포함하므로 $n = 8, 9, 10, 11$ 이다. 따라서 모든 n 의 값의 합은 38 이다.

25. 두 집합 $A = \{0, 2, 4\}, B = \{1, 3, 5\}$ 에 대하여 집합 C 가 다음을 만족할 때, 집합 C 를 원소나열법으로 나타낸 것은?

$$C = \{x \mid x = a + b, a \in A, b \in B\}$$

[배점 5, 중상]

- ① $\{1, 3\}$
- ② $\{1, 3, 5\}$
- ③ $\{1, 3, 5, 7\}$
- ④ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
- ⑤ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

해설

$0 + 1 = 1, 0 + 3 = 3, 0 + 5 = 5, 2 + 1 = 3, 2 + 3 = 5, 2 + 5 = 7, 4 + 1 = 5, 4 + 3 = 7, 4 + 5 = 9$ 이므로 $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이다.

26. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 24 \text{의 약수}\}$ 의 부분집합 중 6의 약수를 모두 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :
▶ 정답 : 16 개

해설

$A = \{x \mid x \text{는 } 24 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ 이고,
이 중 6의 약수는 1, 2, 3, 6 이다.
따라서 6의 약수를 모두 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{8-4} = 16$ (개)

27. 집합 $S = \{x \mid x \text{는 자연수}\}$ 의 부분집합 $A = \{x \mid x \in A \text{이면 } 5 - x \in A\}$ 가 있다. 집합 A 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3개

해설

자연수 전체집합의 부분집합인 A 가

$A = \{x \mid x \in A \text{이면 } 5 - x \in A\}$ 라는 조건을 가질 때,

집합 A 의 원소가 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, 4이다.

조건을 이용하면 1과 4, 2와 3은 반드시 동시에 원소가 되어야 하므로

집합 A 는 $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 3개의 경우가 가능하다.