

문제 풀이 과제

1. 다음 중 집합인 것을 모두 고르면? [배점 2, 하중]

- ① 10 보다 큰 짝수들의 모임
- ② 아주 큰 수들의 모임
- ③ 몸무게가 40kg 이하인 우리 반 학생들의 모임
- ④ 예쁜 강아지들의 모임
- ⑤ 공부를 잘하는 학생들의 모임

해설

‘아주 큰’, ‘예쁜’ 은 명확한 기준이 될 수 없다.

2. 자연수의 집합을 N , 정수의 집합을 Z , 유리수의 집합을 Q 로 나타낼 때, 다음 중 옳은 것은?

[배점 2, 하중]

- ① $Q \subset Z \subset N$
- ② $Z \subset Q \subset N$
- ③ $N \subset Q \subset Z$
- ④ $Z \subset N \subset Q$
- ⑤ $N \subset Z \subset Q$

해설

벤 다이어그램에서 $N \subset Z \subset Q$



3. $\{1, 4\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4\}$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: 4개

해설

집합 X 는 1, 4를 반드시 원소로 가지는 $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합이므로 개수는 $2^2 = 4$ (개)

4. 두 집합 A, B 에 대하여

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이다. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 3\text{보다 크고 } 10\text{보다 작은 짝수}\}$ 일 때, 집합 B 의 원소의 개수를 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: 3개

해설

$A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.

$A = \{4, 6, 8\}$ 이므로 $B = \{4, 6, 8\}$

따라서 $n(B) = 3$ 이다.

5. 집합 $A = \{a \mid a \text{는 } 12 \text{의 약수이고, 짝수인 자연수}\}$ 를 원소나열법으로 나타낸 것은? [배점 3, 하상]

- ① $A = \{2, 4\}$ ② $A = \{2, 4, 6\}$
 ③ $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ④ $A = \{2, 4, 6, 12\}$
 ⑤ $A = \{2, 4, 6, 8, 12\}$

해설

12의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12 이고 이 중에서 짝수는 2, 4, 6, 12 이므로 $A = \{2, 4, 6, 12\}$ 이다.

6. 우리 반 학생 중에서 형이 있는 학생이 15 명, 누나가 있는 학생이 10 명이고, 형과 누나가 모두 있는 학생이 5 명이다. 형이나 누나가 있는 학생의 수는? [배점 3, 중하]

- ① 10명 ② 12명 ③ 15명
 ④ 17명 ⑤ 20명

해설

형이 있는 학생을 A 라 하면 $n(A) = 15$
 누나가 있는 학생을 B 라 하면 $n(B) = 10$
 형과 누나가 모두 있는 학생은 $A \cap B$ 이므로 $n(A \cap B) = 5$
 형이나 누나가 있는 학생은 $A \cup B$ 이다.
 $\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $= 15 + 10 - 5 = 20$
 따라서 형이나 누나가 있는 학생은 모두 20 명이다.

7. 전체집합 U 의 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 40$, $n(A) = 19$, $n(B) = 27$ 이고 $n((A \cup B)^c) = 3$ 일 때, $n(A^c \cup B)$ 를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(U) - n((A \cup B)^c) \\ &= 40 - 3 \\ &= 37 \\ n(A \cap B) &= 46 - 37 = 9 \\ n(A^c \cup B) &= 40 - 10 = 30 \end{aligned}$$

8. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 소수}\}$ 일 때, $B \subset A$, $n(B) = 3$ 를 만족하는 집합 B 의 개수는? [배점 3, 중하]

- ① 2개 ② 4개 ③ 8개
 ④ 12개 ⑤ 16개

해설

$A = \{2, 3, 5, 7\}$ 이므로 B 가 될 수 있는 것은 $\{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{2, 5, 7\}$

9. 어느 반 학생 35명 중 피자를 좋아하는 학생이 19명, 떡볶이를 좋아하는 학생이 21명, pizza와 떡볶이 모두를 싫어하는 학생이 3명일 때, 둘 다 좋아하는 학생은 몇 명인가? [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 8명

해설

전체 반 학생들의 집합을 U , 피자를 좋아하는 학생들의 집합을 A , 떡볶이를 좋아하는 학생들의 집합을 B 라고 하면,

$$n(U) = 35, n(A) = 19, n(B) = 21$$

$$n((A \cup B)^c) = 3$$

$$n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c) = 35 - 3 = 32$$

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 19 + 21 - 32 = 8$$

10. n 이 자연수이고 집합 A, B 가 $A = \{x \mid x = 3 \times n\}$, $B = \{x \mid x = 3 \times n + 1\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은? [배점 4, 중중]

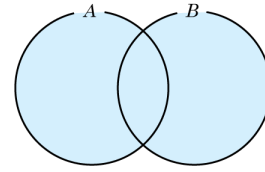
① $1 \in A$ ② $3 \notin A$ ③ $4 \notin B$

④ $7 \in B$ ⑤ $8 \in B$

해설

집합 A 의 원소는 3, 6, 9, 12 ... 이고 집합 B 의 원소는 4, 7, 10, ... 이므로 $7 \in B$ 이다.

11. 집합 $A = \{x \mid x = 2 \times n - 1, n \text{은 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$, $B = \{5, 7, 9, 17, 19\}$ 일 때 다음 벤 다이어그램에서의 색칠한 부분의 집합은?



[배점 4, 중중]

① $\{1, 3, 5, 9, 11, 13, 17\}$

② $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

③ $\{1, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

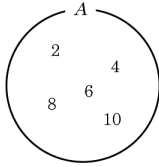
④ $\{1, 5, 13, 19\}$

⑤ $\{1, 5, 13, 19, 21, 23\}$

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고쳐보면 $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$ 이다.

12. 다음 벤 다이어그램의 집합 A 를 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은?



[배점 4, 중중]

- ① $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$
- ② $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$
- ③ $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{의 약수}\}$
- ④ $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{의 배수}\}$
- ⑤ $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수}\}$

해설

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 이므로 조건제시법으로 나타내면 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수}\}$ 이다.

13. $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, a, a+1\}$ 이고 $A \cap B = \{2, 4\}$ 일 때 집합 B 의 원소의 합을 구하면?(정답2개) [배점 4, 중중]

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

$A \cap B = \{2, 4\}$ 이므로 $a = 4$ 이거나 $a+1 = 4$ 여야 한다.

i) $a = 4$ 일 때

$B = \{2, 4, 5\}$, 원소들의 합은 11

ii) $a+1 = 4$ 즉 $a = 3$ 일 때

$B = \{2, 3, 4\}$, 원소들의 합은 9

14. 두 집합 $A = \{1, 2, a\}$, $B = \{2, 3, a+1\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{2, 3\}$ 일 때, 집합 $A \cup B$ 는?

[배점 4, 중중]

- ① $\{2, 3\}$ ② $\{2, 3, 4\}$
- ③ $\{3, 4, 5\}$ ④ $\{1, 2, 3, 4\}$
- ⑤ $\{1, 2, 3\}$

해설

$A \cap B = \{2, 3\}$ 이므로 $A = \{1, 2, 3\}$

따라서 $a = 3$ 이다. $B = \{2, 3, 4\}$

$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

15. 집합 A, B, C, D, E 의 관계가 보기와 같을 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

보기

$$A \subset B, B \subset D, C \subset D, D \subset E$$

[배점 5, 중상]

- ① 집합 A 는 집합 E 의 부분집합이다.
- ② 집합 B 는 집합 E 의 부분집합이다.
- ③ 집합 C 는 집합 E 의 부분집합이다.
- ④ 집합 B 는 집합 C 의 부분집합이다.
- ⑤ $D \subset C$ 이면, $A \subset C$ 이다.

해설

④ 집합 B 가 집합 C 의 부분집합인지는 주어진 조건만으론 알 수 없다.

16. 두 집합

$$A = \{x \mid x \text{는 } 100 \text{ 이상 } 200 \text{ 이하 } 15 \text{의 배수}\},$$

$$B = \{x \mid x \text{는 } 80 \text{ 보다 작은 } 2 \text{의 배수}\} \text{ 일 때,}$$

$$n(B) - n(A) \text{ 는?} \quad [\text{배점 } 5, \text{ 중상}]$$

- ① 10 ② 14 ③ 19 ④ 27 ⑤ 32

해설

$$n(A) = 7, \quad n(B) = 39$$

$$n(B) - n(A) = 39 - 7 = 32$$

17. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\},$

$$B = \{y \mid y = x - 2, x \in A\},$$

$$C = \{a - 4, a + 1, 2a + 1, -a\} \text{ 일 때,}$$

$$B \cap C = \{-1, 2, 3\} \text{ 을 만족하는 정수 } a \text{ 의 값은?}$$

[배점 5, 중상]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$2a + 1 = 3 \text{ 일 때, } a = 1$$

$$C = \{-3, 2, 3, -1\}$$

$$B \cap C = \{-1, 2, 3\}$$

18. 우리 반 학생 40 명 중에서 영어 학원을 다니는 학생은 25 명, 수학 학원을 다니는 학생은 21 명이라면, 두 과목 모두 학원을 다니는 사람 수의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 27 명

해설

문제에서 $A \cup B$ 이 주어지고 있다. 우리 반 학생 40 명이 $A \cup B$ 이다.

영어 학원을 다니는 학생을 집합 A 라고 하고, 수학 학원을 다니는 학생은 집합 B 라고 한다.

영어, 수학 학원을 모두 다니는 학생은 $A \cap B$ 가 된다.

$A \cap B$ 의 최솟값과 최댓값을 구해 보자.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$40 = 25 + 21 - x$$

x 의 최솟값은 6 이다.

최댓값은 수학 학원을 다니는 학생이 영어 학원을 다니는 학생에 포함될 때 성립한다.

그러므로 x 의 최댓값은 21(명)이다.

최솟값과 최댓값의 합은 27(명)이다.

19. 전체집합 $U = \{3x + 1 | x < 10, x \text{는 자연수}\}$ 의 부분 집합 A, B 가 있다.

$$A^c \cap B^c = \{28\}, (A \cup B) - (A \cap B) = \{4, 10, 19, 25\}$$

일 때, $n(A \cap B)$ 를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$U = \{3x + 1 | x < 10, x \text{는 자연수}\} = \{4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\},$$

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{28\},$$

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) = \{4, 10, 19, 25\},$$

전체집합 U 는 $A - B, B - A, (A \cup B)^c, A \cap B$ 로 이루어지므로,

$$A \cap B = \{7, 13, 16, 22\} \text{ 이다.}$$

$$\therefore n(A \cap B) = 4$$

20. 집합 $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_N\}$ 에 대하여 $f(P) = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_N$ 이라 정의한다.

집합 $A = \{3, 6, 9, 12\}$ 의 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{16}$ 이라 할 때, $f(A_1) + f(A_2) + f(A_3) + \dots + f(A_{16})$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

$A = \{3, 6, 9, 12\}$ 의 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{16}$ 이라 두면,
집합 A 의 모든 부분집합에서 하나의 원소는 모두 $2^{4-1} = 8$ (번) 씩 나온다.
따라서 $f(A_1) + f(A_2) + f(A_3) + \dots + f(A_{16}) = 8 \times (3 + 6 + 9 + 12) = 240$

21. 집합 $A = \{1, 2, 4, 8, \dots, 2^m\}$ 의 부분집합 중에서 1 과 2 는 반드시 포함하고, 2 를 제외한 짝수 번째 원소들은 포함하지 않는 부분집합의 개수가 64 개일 때, 자연수 m 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

1 과 2 는 반드시 포함하고 2 를 제외한 짝수 번째 원소들의 개수 $\frac{m}{2} - 1$ (개)는 반드시 포함하지 않으므로
 $2^{m-2-(\frac{m}{2}-1)} = 64$ 이므로
 $m - 2 - (\frac{m}{2} - 1) = 6, \frac{m}{2} - 1 = 6,$
 $m = 14$

22. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 100 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 부분집합 $Q_k = \{x | x \text{는 } k \text{의 배수}\}$ 이 있다.

$(Q_{10} \cup Q_{15}) \subset Q_a$, $(Q_2 \cap Q_3) = Q_b$ 이라 할 때, $n(Q_a \cup Q_b)$ 를 구하여라. (단, $1 < a < 10$, $1 < b < 10$)

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 33

해설

$(Q_{10} \cup Q_{15}) \subset Q_a$ 일 때, 10 의 배수와 15 의 배수를 포함하는 것은 5 의 배수이다.

$\rightarrow a = 5$

$(Q_2 \cap Q_3) = Q_b$ 일 때, 2 의 배수와 3 의 배수의 교집합은 6 의 배수이다.

$\rightarrow b = 6$

따라서,

$$Q_a \cup Q_b = Q_5 \cup Q_6$$

$$\therefore n(Q_a \cup Q_b) = n(Q_5 \cup Q_6)$$

$$= n(Q_5) + n(Q_6) - n(Q_5 \cap Q_6)$$

$$= n(Q_5) + n(Q_6) - n(Q_{30})$$

$$= 20 + 16 - 3 = 33$$

23. 집합 P 의 부분집합의 개수를 $s(P)$ 로 정의한다. 세 집합 A, B, C 에 대하여 다음과 같은 관계가 성립할 때, $A \cap B \cap C$ 의 원소의 개수를 구하여라.

- (가) $A - B = B - C = C - A$
 (나) $s(A) \cdot s(B) \cdot s(C) = 64$

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2개

해설

$A - B = B - C = C - A$ 이면 $A = B = C$ 이므로
 $n(A) = n(B) = n(C) = k$,
 $s(A) \cdot s(B) \cdot s(C) = 64$,
 $\rightarrow 2^k \times 2^k \times 2^k = 64$,
 $\rightarrow k = 2$,
 따라서 $n(A \cap B \cap C) = n(A) = n(B) = n(C) = 2$