

문제 풀이 과제

1. $(2x+3):(x-3)=x:4$ 를 만족하는 x 의 값을 각각 a, b 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

[배점 3, 하상]

▶ 답:

▶ 정답: 11

해설

$$\begin{aligned}(2x+3):(x-3) &= x:4 \\ x^2-3x &= 4(2x+3), x^2-3x=8x+12 \\ x^2-11x-12 &= 0, (x+1)(x-12)=0 \\ \therefore x &= -1 \text{ 또는 } x=12 \\ \text{따라서 } a+b &= 11 \text{ 이다.}\end{aligned}$$

2. x 가 집합 $\{x|0 < x < 3\}$ 의 원소일 때, 이차방정식 $x^2-5x+6=0$ 의 해집합은?

[배점 3, 하상]

- ① $\{-3, -2\}$ ② $\{-2\}$
 ③ $\{2\}$ ④ $\{3\}$
 ⑤ $\{2, 3\}$

해설

$$\begin{aligned}x^2-5x+6 &= 0 \\ (x-2)(x-3) &= 0 \therefore x=2, 3 \\ x \text{ 가 집합 } \{x|0 < x < 3\} \text{ 의 원소이므로, 해집합은 } &\{2\} \text{ 이다.}\end{aligned}$$

3. x 가 집합 $\{x|0 < x < 3\}$ 의 원소일 때, 이차방정식 $x^2-5x+6=0$ 의 해집합은?

[배점 3, 하상]

- ① $\{-3, -2\}$ ② $\{-2\}$
 ③ $\{2\}$ ④ $\{3\}$
 ⑤ $\{2, 3\}$

해설

$$\begin{aligned}x^2-5x+6 &= 0 \\ (x-2)(x-3) &= 0 \therefore x=2, 3 \\ x \text{ 가 집합 } \{x|0 < x < 3\} \text{ 의 원소이므로, 해집합은 } &\{2\} \text{ 이다.}\end{aligned}$$

4. x 에 대한 이차방정식 $x^2+8x+15-k=0$ 이 중근을 가질 때, 상수 k 의 값은?

[배점 3, 하상]

- ① $k=-1$ ② $k=1$ ③ $k=-2$
 ④ $k=2$ ⑤ $k=0$

해설

$$\begin{aligned}\text{중근을 가지려면 } x^2+8x+15-k \text{ 가 완전제곱식이} & \\ \text{되어야 하므로 } 15-k &= 16 \\ \therefore k &= -1\end{aligned}$$

5. 이차방정식 $2x^2 - 9x - ax + 3a + 8 = 0$ 이 정수의 근을 가질 때, 정수 a 의 값들의 합을 구하면?

[배점 3, 중하]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

주어진 식을 a 에 관하여 정리하면 $-a(x-3) + 2x^2 - 9x + 8 = 0$ 이다.

$$\begin{aligned} a &= \frac{2x^2 - 9x + 8}{x-3} \\ &= \frac{(x-3)(2x-3) - 1}{x-3} \\ &= 2x - 3 - \frac{1}{x-3} \end{aligned}$$

a 는 정수이므로 $x-3 = \pm 1$ 이다.

$x = 2$ 또는 $x = 4$ 이므로

(i) $x = 2$ 일 때, $a = 2$

(ii) $x = 4$ 일 때, $a = 4$ 이다.

따라서 정수 a 의 값들의 합은 $2 + 4 = 6$ 이다.

6. 이차방정식 $3x^2 - 16x - ax + 4a + 15 = 0$ 이 정수의 근을 가질 때, 정수 a 의 값을 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 6$

▷ 정답: $a = 10$

해설

주어진 식을 a 에 관하여 정리하면 $-a(x-4) + 3x^2 - 16x + 15 = 0$ 이다.

$$\begin{aligned} a &= \frac{3x^2 - 16x + 15}{x-4} \\ &= \frac{(x-4)(3x-4) - 1}{x-4} \\ &= 3x - 4 - \frac{1}{x-4} \end{aligned}$$

a 는 정수이므로 $x-4 = \pm 1$ 이다.

$x = 3$ 또는 $x = 5$ 이므로

(i) $x = 3$ 일 때, $a = 6$

(ii) $x = 5$ 일 때, $a = 10$ 이다.

7. 다음 중 집합 $\{x \mid x^2 - 7x - 30 = 0\}$ 과 같은 것은?
[배점 3, 중하]

- ① $\{x \mid x + 3 \neq 0\} \cap \{x \mid x - 10 \neq 0\}$
- ② $\{x \mid x + 3 \neq 0\} \cup \{x \mid x - 10 \neq 0\}$
- ③ $\{x \mid x + 3 = 0\} \cap \{x \mid x - 10 = 0\}$
- ④ $\{x \mid x + 3 = 0\} \cup \{x \mid x - 10 = 0\}$
- ⑤ $\{x \mid x + 3 = 0\} \cup \{x \mid x - 10 \neq 0\}$

해설

$$\begin{aligned} & \{x \mid x^2 - 7x - 30 = 0\} \\ &= \{x \mid (x + 3)(x - 10) = 0\} \\ &= \{x \mid x + 3 = 0 \text{ 또는 } x - 10 = 0\} \\ &= \{x \mid x + 3 = 0\} \cup \{x \mid x - 10 = 0\} \end{aligned}$$

8. 다음 이차방정식 중 중근을 갖는 것을 모두 고르면?
[배점 3, 중하]

- ① $2x^2 + 4x + 2 = 0$
- ② $x^2 + 10x + 25 = 0$
- ③ $3x^2 - 7x + 2 = 0$
- ④ $10(x - 1) = x^2 + 11$
- ⑤ $(x - 3)^2 = 4$

해설

$$\begin{aligned} & \text{① } 2x^2 + 4x + 2 = 0 \text{ 에서 } 2(x^2 + 2x + 1) = 0, 2(x + 1)^2 = 0 \\ & \therefore x = -1 \\ & \text{② } x^2 + 10x + 25 = 0 \text{ 에서 } (x + 5)^2 = 0 \\ & \therefore x = -5 \\ & \text{③ } 3x^2 - 7x + 2 = 0 \text{ 에서 } (3x - 1)(x - 2) = 0 \\ & \therefore x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 2 \\ & \text{④ } 10(x - 1) = x^2 + 11 \text{ 에서 } x^2 - 10x + 21 = 0, \\ & (x - 3)(x - 7) = 0 \\ & \therefore x = 3 \text{ 또는 } x = 7 \\ & \text{⑤ } (x - 3)^2 = 4 \text{ 에서 } x^2 - 6x + 5 = 0, (x - 1)(x - 5) = 0 \\ & \therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 5 \end{aligned}$$

9. 완전제곱식을 이용하여 다음 이차방정식을 풀 때, 그 근으로 알맞은 것은?

$$3x^2 - 8x + 1 = 0$$

[배점 4, 중중]

- ① $\frac{2 \pm \sqrt{13}}{3}$ ② $\frac{4 \pm \sqrt{13}}{2}$
 ③ $\frac{4 \pm \sqrt{13}}{3}$ ④ $\frac{2 \pm \sqrt{13}}{2}$
 ⑤ $\frac{-4 \pm \sqrt{13}}{3}$

해설

양변에 3 을 나누면 $x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{1}{3} = 0, x^2 - \frac{8}{3}x = -\frac{1}{3}, x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} = -\frac{1}{3} + \frac{16}{9}$
 $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{13}{9}, x = \frac{4 \pm \sqrt{13}}{3}$ 이다.

10. 다음은 완전제곱식을 이용하여 이차방정식 $2x^2 + 3x - 1 = 0$ 의 해를 구하는 과정의 일부분이다. 이때, $A + B$ 의 값은?

$2x^2 + 3x - 1 = 0$ 의 양변을 2 로 나누면 $x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0$
 $-\frac{1}{2}$ 을 우변으로 이항하면 $x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}$
 양변에 A 를 더하면 $x^2 + \frac{3}{2}x + A = \frac{1}{2} + A$
 좌변을 완전제곱식으로 바꾸면 $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = B$

[배점 4, 중중]

- ① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{23}{16}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{53}{16}$

해설

좌변을 완전제곱식으로 만들기 위해 A 를 더한다.
 $A = \left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}, B = \frac{9}{16} + \frac{1}{2} = \frac{17}{16}$
 따라서 $A + B = \frac{9}{16} + \frac{17}{16} = \frac{13}{8}$ 이다.

11. 이차방정식 $(x-1)(x-3)-2=0$ 을 $(x-a)^2=b$ 의 꼴로 고칠 때, $b-a$ 의 값을 구하면?

[배점 4, 중중]

- ① 1 ② -1 ③ -2 ④ 3 ⑤ 5

해설

식을 전개하여 정리하면 $x^2 - 4x + 1 = 0$
 상수항을 이항하면 $x^2 - 4x = -1$
 양변에 4 를 더하면 $x^2 - 4x + 4 = -1 + 4$
 $(x-2)^2 = 3$
 따라서, $a=2, b=3$ 이고 $b-a=1$

12. 부등식 $2x+5 \leq x+6$ 의 자연수의 해가 중근을 갖는 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 해 일 때, a 의 값은?

[배점 4, 중중]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$2x+5 \leq x+6, x \leq 1$
 이를 만족하는 자연수는 1 뿐이다.
 따라서 $x=1$ 이 주어진 이차방정식의 중근이므로
 $x^2+ax+b=0 \leftrightarrow (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 = 0$
 $\therefore a=-2, b=1$

13. 이차방정식 $3(x-b)^2=15$ 의 근이 $x=7 \pm \sqrt{a}$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$3(x-b)^2=15, (x-b)^2=5$
 $\therefore x=b \pm \sqrt{5}$
 이것이 $7 \pm \sqrt{a}$ 이므로 $a=5, b=7$ 이다.
 $\therefore a+b=12$

14. 이차방정식 $2x^2-4x-3=0$ 을 완전제곱식으로 풀고 두 근 중에서 작은 근을 m , 큰 근을 n 이라 할 때, $a < m < a+1, b < n < b+1$ 을 만족하는 정수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -1$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

양변을 2 로 나누면 $x^2-2x-\frac{3}{2}=0$ 이고 $x^2-2x=\frac{3}{2}$, 양변에 1 을 더하면
 $x^2-2x+1=\frac{3}{2}+1, (x-1)^2=\frac{5}{2}, x=\frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$
 이다.
 작은 근 $\frac{2-\sqrt{10}}{2}=m$ 이고, $-1 < m < 0$ 이므로 $a=-1$ 이다.
 큰 근 $\frac{2+\sqrt{10}}{2}=n$ 이고, $2 < n < 3$ 이므로 $b=2$ 이다.
 따라서 $a=-1, b=2$ 이다.

15. $x^2 + 4xy + 4y^2 = 0 (xy \neq 0)$ 일 때, $\frac{(x-y)^2}{2xy}$ 의 값을 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{9}{4}$

해설

$$x^2 + 4xy + 4y^2 = 0 \text{ 에서 } (x + 2y)^2 = 0$$

$$\therefore x = -2y$$

$\frac{(x-y)^2}{2xy}$ 에 $x = -2y$ 를 대입하면

$$\frac{(-2y-y)^2}{2(-2y)y} = \frac{(-3y)^2}{(-4y^2)} = \frac{9y^2}{(-4y^2)} = -\frac{9}{4}$$

16. $[x]$ 를 x 를 넘지 않는 가장 큰 정수라고 정의하면 $-2 \leq x < -1$ 일 때,
방정식 $-[x]x^2 - x + 3[x] = 0$ 의 근이 $-\frac{a}{b}$ 라고 하면
 $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 서로소)
[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$-2 \leq x < -1$ 이므로 $[x] = -2$ 이다.

따라서 $[x] = -2$ 를 대입하면 주어진 방정식은

$$2x^2 - x - 6 = 0 \text{ 이고, 인수분해하여 정리하면}$$

$$(2x + 3)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2} (\because -2 \leq x \leq 1)$$

따라서 $a = 3, b = 2$ 이므로 $a + b = 5$ 이다.

17. 이차방정식 $4(x-2)^2 = 3$ 의 해가 $x = \frac{A}{2} \pm \frac{\sqrt{B}}{2}$ 일 때, $A - B$ 의 값은?
[배점 5, 중상]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$4(x-2)^2 = 3, (x-2)^2 = \frac{3}{4}$$

$$x-2 = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore A = 4, B = 3$$

$$\therefore A - B = 4 - 3 = 1$$

18. 다음 이차방정식 $x^2 - 2ax + a^2 - 10 = 0$ 의 해가 $x = 7 \pm \sqrt{b}$ 일 때, ab 의 값을 구하여라.
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 70

해설

$$x^2 - 2ax = -a^2 + 10$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = -a^2 + 10 + a^2 = 10$$

$$(x-a)^2 = 10 \text{ 이므로}$$

$$x-a = \pm\sqrt{10}$$

$$\therefore x = a \pm \sqrt{10}$$

따라서 $a = 7, b = 10$ 이므로 $ab = 70$ 이다.