

문제 풀이 과제

1. $n(A) = 26$, $n(B) = 17$ 이고, $n(A \cap B) = 8$ 일 때, $n(A - B)$ 의 값은? [배점 3, 중하]

① 9 ② 11 ③ 18 ④ 25 ⑤ 26

해설

$$\begin{aligned} n(A - B) &= n(A) - n(A \cap B) \\ n(A - B) &= 26 - 8 = 18 \end{aligned}$$

2. 자연수 A 와 72 의 최대공약수는 12 이고, 최소공배수는 360 일 때, 자연수 A 를 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 60

해설

$$\begin{aligned} A \times 72 &= 12 \times 360 \\ A &= 60 \end{aligned}$$

3. 한 모서리의 길이가 $1011_{(2)}$ 인 정팔면체의 겉넓이를 십진법으로 구한 것은? [배점 3, 중하]

① $240\sqrt{2}$ ② $242\sqrt{3}$ ③ $250\sqrt{2}$
④ $252\sqrt{3}$ ⑤ $260\sqrt{2}$

해설

$$11101_{(2)} = 11$$

정팔면체의 한 변의 길이 : 11

$$\text{겉넓이} : 11 \times 11 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 8 = 121 \times 2\sqrt{3} = 242\sqrt{3}$$

4. $1011_{(2)}$ 와 $11101_{(2)}$ 사이에 있는 5 의 배수는 몇 개인지 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 3 개

해설

$$1011_{(2)} = 11$$

$$11101_{(2)} = 29$$

11 과 29 사이의 5 의 배수 : 15, 20, 25

5. 600 을 자연수 x 로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 나누어야 할 가장 작은 자연수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 6

해설

600 을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)600} \\ 2 \overline{)300} \\ 2 \overline{)150} \\ 3 \overline{)75} \\ 5 \overline{)25} \\ 5 \end{array}$$

$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$ 이므로 $\frac{2^3 \times 3 \times 5^2}{x}$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 x 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 $2 \times 3 = 6$ 이다.

6. 두 분수 $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$ 중 어느 것을 곱해도 자연수가 되는 100 이하의 자연수의 개수는? [배점 3, 중하]

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개
④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

두 분수가 자연수가 되려면, n 은 6 과 10 의 공배수이어야 한다.

공배수 중 가장 작은 수는 두 수의 최소공배수이어야 한다.

n 의 값 중 가장 작은 수는 30 이다.

따라서 100 이하의 자연수이므로 30, 60, 90 이고 3 개이다.

7. 쿼 60 개, 배 45 개, 감 30 개를 하나도 빠짐없이 되도록 많은 사람들에게 똑같이 나누어주려고 한다. 몇 사람에게 나누어주면 되는지 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 15 명

해설

구하고자 하는 학생 수는 60, 45, 30 의 최대공약수이므로 15 (명) 이다.

8. 다음 <보기>의 네 가지 조건으로 확실히 말할 수 있는 것은?

보기

- 모든 A 의 원소는 B 의 원소이다.
- 모든 B 의 원소는 C 의 원소이다.
- 모든 D 의 원소는 B 의 원소이다.
- 모든 E 의 원소는 C 의 원소이다.

[배점 4, 중중]

- ① 모든 A 의 원소는 C 의 원소이다.
- ② 모든 C 의 원소는 E 의 원소이다.
- ③ 모든 B 의 원소는 D 의 원소이다.
- ④ D 와 C 의 관계는 알 수 없다.
- ⑤ D 의 원소 중 B 의 원소가 아닌 것이 있다.

해설

- 모든 A 의 원소는 B 의 원소이다. $A \subset B$
 - 모든 B 의 원소는 C 의 원소이다. $B \subset C$
 - 모든 D 의 원소는 B 의 원소이다. $D \subset B$
 - 모든 E 의 원소는 C 의 원소이다. $E \subset C$
- ② C 의 원소 중 E 의 원소가 아닌 것도 있다.
- ③ B 의 원소 중 D 의 원소가 아닌 것도 있다.
- ④ D 와 C 의 관계는 $D \subset C$ 이다.
- ⑤ $D \subset B$ 이므로 D 의 원소 중 B 의 원소가 아닌 것은 없다.

9. 두 집합 C, D 에 대하여

$n(C) = 20, n(D) = 12, C \cap D = \emptyset$ 일 때, $n(C \cup D)$ 는?
[배점 4, 중중]

- ① 30 ② 31 ③ 32 ④ 33 ⑤ 34

해설

$$\begin{aligned} n(C \cup D) &= n(C) + n(D) - n(C \cap D) \\ &= 20 + 12 - 0 = 32 \end{aligned}$$

10. 자연수 160에 n 을 곱하면 자연수의 제곱이 된다고 한다. 이 때, n 이 될 수 있는 모든 수의 합을 구하여라.(단, n 은 50미만의 자연수이다.)

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 50

해설

$$\begin{aligned} 160 \times n &= 2^5 \times 5 \times n = m^2 \text{ 이라 하면} \\ \text{가장 작은 } n &= 2 \times 5 \\ \text{따라서 } n \text{이 될 수 있는 50미만의 수는} \\ 2 \times 5 &= 10 \\ 2 \times 5 \times 2^2 &= 40 \\ \therefore 10, 40 \\ \therefore 10 + 40 &= 50 \end{aligned}$$

11. 자연수 $360 \times n$ 이 자연수의 제곱이 된다고 할 때, n 이 될 수 있는 모든 수의 합을 구하여라. (단, n 은 160 미만의 자연수이다.) [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 140

해설

$360 \times n = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times n = m^2$ 이라 하면
가장 작은 $n = 2 \times 5$
따라서 n 이 될 수 있는 160 미만의 수는
 $2 \times 5 = 10$
 $2 \times 5 \times 2^2 = 40$
 $2 \times 5 \times 3^2 = 90$
 $\therefore 10, 40, 90$
 $\therefore 10 + 40 + 90 = 140$

12. 볼펜 24 개, 연필 72 개, 지우개 48 개를 되도록 많은 학생들에게 똑같이 나누어 주려고 한다. 이 때, 한 학생이 받는 모든 물건의 개수는 총 몇 개인지 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6 개

해설

$24 = 2^3 \times 3$, $72 = 2^3 \times 3^2$, $48 = 2^4 \times 3$ 이므로
24, 72, 48 의 최대공약수는 $2^3 \times 3 = 24$
따라서 한 사람이 받는 물건은 볼펜 1 개, 연필 3
자루, 지우개 2 개이므로
총 개수는 6 이다.

13. 전체집합 $U = \{10, 20, 30, 40, 50\}$ 의 두 부분집합 A , B 가 $A \cup B = U$, $A \cap B = \{30, 50\}$ 을 만족한다. 집합 A , B 의 원소의 합을 각각 $S(A)$, $S(B)$ 라고 할 때, $S(A) + S(B)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 230

해설

$S(A) + S(B)$ 의 값을 구하는 것이므로
각 원소를 아무렇게나 배열해도 원소의 합은 같다.
 $\therefore 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + (30 + 50) = 230$

14. 두 자리의 자연수 A , B 에 대해서 $A = 5 \times a$, $B = 5 \times b$ 일 때, A , B 의 최대공약수는 $101_{(2)}$ 이고, 최소공배수는 $5 \times 11100_{(2)}$ 이다. $A > B$ 일 때, $a - b$ 의 값을 이진법으로 나타낸 것은? [배점 5, 중상]

① $1_{(2)}$

② $10_{(2)}$

③ $11_{(2)}$

④ $100_{(2)}$

⑤ $101_{(2)}$

해설

$101_{(2)} = 4 + 1 = 5$
 $A = 5 \times a$, $B = 5 \times b$ 에서 최대공약수가 5 이므로
 a , b 는 서로소이다.
따라서 A , B 의 최소공배수는
 $5 \times a \times b = 5 \times 11100_{(2)} = 5 \times 28$
 a , b 가 서로소이므로 $(2, 14)$, $(14, 2)$ 는 될 수
없다.
따라서 $(a, b) = (4, 7)$ 또는 $(7, 4)$ 이고 $A > B$
이라 했으므로 $a = 7$, $b = 4$ 이다.
 $a - b = 3 = 11_{(2)}$ 이다.

15. $U = \{x | 0 \leq x < 15, x \text{는 자연수}\}$ 의 두 부분 집합 $A = \{x | x \text{는 } 12 \text{ 이하의 } 2 \text{의 배수}\}, B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ 에 대하여 $n((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))$ 을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}, B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ 이므로

$$n((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))$$

$$= n((A - B) \cup (B - A))$$

$$= n(\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}) = 10 \text{ 이다.}$$

16. 원소의 개수가 40 개인 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A \cap B) = k$ 라고 할 때, $n(A) = n(A^c) = 5k, n(B - A) = 3k$ 이다. 이 때 $n(A^c \cap B^c)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$n(A) = n(A^c) = 5k \rightarrow n(U) = 40$ 이므로 $10k = 40, k = 4$ 이고,
 $n(A) = 20, n(B - A) = 12$ 이므로 $n(A \cup B) = 32$
 $\therefore n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) = 40 - 32 = 8$

17. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합인 집합 $A = \{a | a \in A \text{이면 } 48 \div a \in A, a \text{는 자연수}\}$ 의 모든 원소의 합을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 124

해설

$A = \{a | a \in A \text{이면 } 48 \div a \in A, a \text{는 자연수}\}$ 조건으로 집합 A 의 원소는 48 의 약수라는 것을 알 수 있다.
 48 의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 이므로
 집합 A 의 모든 원소의 합은 $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 + 16 + 24 + 48 = 124$

18. n 진법으로 나타낸 2 개의 네 자리 수의 합의 식이 $ab45_{(n)} + 2ccb_{(n)} = b002a_{(n)}$ 일 때, $\frac{a+b+c}{n}$ 를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{14}{9}$

해설

$ab45_{(n)} + 2ccb_{(n)} = b002a_{(n)}$ 이므로, $b = 1$
 $\rightarrow a145_{(n)} + 2cc1_{(n)} = 1002a_{(n)}$ 이고, $a = 5 + 1$ 이므로 $a = 6$
 $\rightarrow 6145_{(n)} + 2cc1_{(n)} = 10026_{(n)}$
 $\rightarrow$ 각 자리 수를 계산하면, $4 + c = n + 2, 1 + 1 + c = n, 1 + 6 + 2 = n$
 $\therefore \frac{a+b+c}{n} = \frac{6+1+7}{9} = \frac{14}{9}$

19. 다음 나눗셈의 나머지를 이진법의 수로 나타내어라.

$$(1101_{(2)} + 110_{(2)}) \div 10000_{(2)}$$

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $11_{(2)}$

해설

$$(1101_{(2)} + 110_{(2)}) \div 10000_{(2)} = (13 + 6) \div 16 \\ = 1 \cdots 3 \\ \text{나머지 : } 3 = 11_{(2)}$$

20. 20 과 28 의 어느 것으로 나누어도 6 이 남는 자연수 중 가장 큰 세 자리 자연수를 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 986

해설

20 과 28 의 어느 것으로 나누어도 나머지가 6 인 수를 k 라고 하면, $(k - 6)$ 은 20 과 28 의 공배수가 됩니다.

따라서 20 과 28 의 공배수 중에서 세 자리의 자연수를 구하고, 거기에 6 을 더하면 됩니다.

20 과 28 의 최소공배수는 140 이므로, 세 자리 수 중 가장 큰 140 의 배수는 $140 \times 7 = 980$ 입니다.

따라서 구하는 수는 $980 + 6 = 986$ 입니다.

21. 다음은 골드바흐가 생각해낸 소수에 관한 추측이다. 골드바흐의 추측을 설명한 것이 아닌 것은?

보기

[골드바흐의 추측]

2 보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다.

[배점 6, 상상]

① $12 = 5 + 7$

② $14 = 3 + 11$

③ $16 = 5 + 11$

④ $18 = 7 + 11$

⑤ $20 = 9 + 11$

해설

소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... 이므로 골드바흐의 추측을 설명한 것이 아닌 것은 $20 = 9 + 11$ 이다.