

# 문제 풀이 과제

1. 소인수분해를 이용하여 50의 약수의 개수를 구하려고 한다. 다음 중  $a, b, c$ 에 들어갈 알맞은 수를 차례대로 나열한 것은?

$$50 = 2^a \times 5^b \quad \text{약수의 개수: } (a+1) \times (b+1) = c \quad (\text{개})$$

[배점 2, 하중]

- ① 1, 2, 3      ② 1, 2, 6      ③ 2, 4, 8  
 ④ 2, 5, 8      ⑤ 3, 4, 5

해설

50을 소인수분해하면  $50 = 2 \times 5^2$  이므로  $a = 1, b = 2$  이다.  
 또한 50의 약수의 개수는  $(1+1) \times (2+1) = 6$  (개)이므로  $c = 6$  이다.  
 따라서  $a = 1, b = 2, c = 6$  이다.

2. 다음 중 옳지 않은 것은? [배점 2, 하중]

- ① 1은 소수가 아니다.  
 ② 10은 합성수이다.  
 ③ 17은 소수이다.  
 ④ 약수가 2개인 수는 소수이다.  
 ⑤ 두 소수의 합은 언제나 홀수이다.

해설

⑤ (반례) 3과 5는 소수이지만 두 소수의 합인 8은 짝수이다.

3.  $A = \{0, 1, 2\}$  일 때, 다음 중 옳지 않은 것은? [배점 3, 하상]

- ①  $\{1\} \subset A$       ②  $\{1, 2, 0\} \subset A$   
 ③  $\{0\} \subset A$       ④  $0 \subset A$   
 ⑤  $\{0, 1\} \subset A$

해설

0은 집합  $A$ 의 원소이므로  $\in$  기호를 이용하여 나타내어야 한다.

4. 자연수  $A = 2^2 \times 3^n$ 의 약수의 개수가 24일 때,  $n$ 의 값을 구하면? [배점 3, 하상]

- ① 2      ② 5      ③ 7      ④ 8      ⑤ 12

해설

$$(2+1)(n+1) = 24$$

$$n+1 = 8$$

$$\therefore n = 7$$

5. 어느 반 학생 39 명이 수학 시험을 보는데 A 문제를 맞힌 학생은 19 명, B 문제를 맞힌 학생은 27 명, A 와 B 모두 맞힌 학생은 12 명일 때, A 와 B 모두 틀린 학생은 몇 명인지 구하여라.(단, 수학 시험의 문제는 A 와 B 두 문제만 있다.) [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 5명

**해설**

A 문제를 맞힌 학생을  $A$  라 하면  $n(A) = 19$   
 B 문제를 맞힌 학생을  $B$  라 하면  $n(B) = 27$   
 A 와 B 모두 맞힌 학생은  $A \cap B$  이므로  $n(A \cap B) = 12$   
 A 나 B 를 맞힌 학생은  $A \cup B$  이다.  
 $\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 19 + 27 - 12 = 34$ (명)  
 따라서 A 와 B 를 모두 틀린 학생은 5 명이다.

6. 소원이가 주문을 외우면 모래의 요정 바람돌이가 나타나서 퀴즈를 내고, 소원이가 그 퀴즈를 맞히면 소원을 들어줍니다. 다음은 소원과 바람돌이의 대화입니다.

바람돌이 : 카드 뒤에는 3 개의 한 자리 자연수  $a, b, c$  가 있어. 3 과  $a$  를 곱하고, 5 와  $b$  를 곱하고, 7 과  $c$  를 곱한 후, 그 값들을 모두 더해. 질문은 한 번만 할 수 있어.

소원이 : 바람돌이!  $a$  와 100 을 곱하고,  $b$  와 10 을 곱하고,  $c$  와 1 을 곱한 후, 그 값들을 모두 더해서 나에게 알려줘.

바람돌이 : 527 이야.

위와 같은 방법으로 소원은 바람돌이의 퀴즈를 풀었습니다. 소원이가 구하려고 하는 값을 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 74

**해설**

$a \times 100 + b \times 10 + c \times 1 = 527$  이므로  $a = 5$ ,  $b = 2$ ,  $c = 7$  이다.

퀴즈의 정답은:  $3 \times 5 + 5 \times 2 + 7 \times 7 = 15 + 10 + 49 = 74$  이다.

7.  $n$  이 자연수이고 집합  $A, B$  가  $A = \{x \mid x = 3 \times n\}$ ,  
 $B = \{x \mid x = 3 \times n + 1\}$  일 때, 다음 중 옳은 것은?  
 [배점 4, 중중]

- ①  $1 \in A$       ②  $3 \notin A$       ③  $4 \notin B$   
 ④  $7 \in B$       ⑤  $8 \in B$

해설

집합  $A$  의 원소는 3, 6, 9, 12 ... 이고 집합  $B$  의 원소는 4, 7, 10, ... 이므로  $7 \in B$  이다.

8. 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

- ㉠  $2^4 = 8$   
 ㉡  $5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 = 5^3 \times 7^2$   
 ㉢  $3^2 = 2^3$   
 ㉣  $\frac{1}{2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{2^2 \times 5^3}$   
 ㉤  $\frac{1}{5^2 \times 5^4} = \frac{1}{5^8}$

[배점 4, 중중]

- ① ㉠, ㉡      ② ㉠, ㉢      ③ ㉠, ㉤  
 ④ ㉡, ㉣      ⑤ ㉢, ㉤

해설

- ㉠  $2^4 = 16$   
 ㉡  $3^2 \neq 2^3$   
 ㉢  $\frac{1}{5^2 \times 5^4} = \frac{1}{5^6}$

9.  $2^8 - 1$  을 이진법으로 나타내면 몇 자리의 수가 되는가?  
 [배점 5, 중상]

- ① 네 자리의 수      ② 다섯 자리의 수  
 ③ 여섯 자리의 수      ④ 일곱 자리의 수  
 ⑤ 여덟 자리의 수

해설

$2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$  이고  
 $255 = 11111111_{(2)}$  이므로 여덟 자리의 수가 된다.

10. 자연수  $A$  와 20 의 최대공약수가 4 이고, 최소공배수가 80 일 때, 자연수  $A$  는?  
 [배점 5, 중상]

- ① 12      ② 14      ③ 16      ④ 18      ⑤ 20

해설

$A \times 20 = 4 \times 80$  이므로  
 $\therefore A = 4 \times 4 = 16$

11. 7을 이진법으로 나타내었을 때, 각 자리의 숫자의 합을 이진법으로 나타내어라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답:  $11_{(2)}$

해설

$$\begin{array}{r} 2) \underline{7} \\ 2) \underline{3} \dots 1 \\ 2) \underline{1} \dots 1 \\ \quad 0 \dots 1 \end{array} \quad \uparrow$$

$\therefore 7=111_{(2)}$

12. 세 집합  $A, B, C$  가  $n(A) = 7, n(B) = 5, n(C) = 4, n(A - B) = 5, n(B - C) = 4, n(C - A) = 4$  일 때,  $n(A \cup B \cup C)$  를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

$$\begin{aligned} n(A - B) &= n(A) - n(A \cap B) = 5 \rightarrow n(A \cap B) = 2 \\ &, \\ n(B - C) &= n(B) - n(B \cap C) = 4 \rightarrow n(B \cap C) = 1 \\ &, \\ n(C - A) &= n(C) - n(C \cap A) = 4 \rightarrow n(C \cap A) = 0 \\ &, \\ n(C \cap A) &= 0 \rightarrow n(A \cap B \cap C) = 0, \\ \therefore n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) \\ &\quad - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \\ &= 7 + 5 + 4 - 2 - 1 - 0 + 0 = 13 \end{aligned}$$

13. 전체집합  $U = \{2x | x \leq 10, x \text{는 자연수}\}$  의 두 부분 집합  $A, B$  에 대하여  $A = \{x | 5 < x < 15\}$  일 때,  $A^c \cap B^c \neq \emptyset, n(A \cap B) = 4$  를 만족하는 집합  $B$  의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: 5개

해설

$$U = \{2x | x \leq 10, x \text{는 자연수}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\},$$

$$A = \{x | 5 < x < 15\} = \{6, 8, 10, 12, 14\},$$

$A^c \cap B^c \neq \emptyset \rightarrow n(A \cup B) = U$  이고,  $n(A \cap B) = 4$  를 만족하는 집합  $B$  는  $A$  의 원소 중 4 개는 반드시 포함하고, 나머지 하나는 반드시 포함하지 않으며  $A^c$  의 원소를 모두 포함하는 부분집합이다.

(1)  $A$  의 원소 중  $\{6, 8, 10, 12\}$  를 반드시 포함하고 14 는 반드시 포함하지 않으며,  $A^c$  의 원소 2, 4, 16, 18, 20 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는  $2^{10-4-1-5} = 1$  (개)

(2)  $A$  의 원소 중  $\{6, 8, 10, 14\}$  를 반드시 포함하고 12 는 반드시 포함하지 않으며,  $A^c$  의 원소 2, 4, 16, 18, 20 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는  $2^{10-4-1-5} = 1$  (개)

(3)  $A$  의 원소 중  $\{6, 8, 12, 14\}$  를 반드시 포함하고 10 는 반드시 포함하지 않으며,  $A^c$  의 원소 2, 4, 16, 18, 20 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는  $2^{10-4-1-5} = 1$  (개)

(4)  $A$  의 원소 중  $\{6, 10, 12, 14\}$  를 반드시 포함하고 8 는 반드시 포함하지 않으며,  $A^c$  의 원소 2, 4, 16, 18, 20 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는  $2^{10-4-1-5} = 1$  (개)

(5)  $A$  의 원소 중  $\{8, 10, 12, 14\}$  를 반드시 포함하고 6 는 반드시 포함하지 않으며,  $A^c$  의 원소 2, 4, 16, 18, 20 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는  $2^{10-4-1-5} = 1$  (개)

따라서 집합  $B$  의 개수는  $1 \times 5 = 5$  (개)

14. 집합  $S = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4 \right\}$  의 공집합이 아닌 부분집합  $A$  가 다음과 같은 조건을 만족할 때, 집합  $A$  의 개수를 구하여라.

$$\bullet x \in A \text{ 이면 } \frac{1}{x} \in A$$

[배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: 15개

해설

주어진 집합은 원소의 역수가 반드시  $A$  의 원소가 되어야 하는 조건을 가진다.  
 $\left(\frac{1}{4}, 4\right), \left(\frac{1}{3}, 3\right), \left(\frac{1}{2}, 2\right), (1, 1)$  은 역수 관계에 있는 두 수의 쌍이다.

- (1) 원소의 개수가 1 개인 집합 :  $\{1\} \Rightarrow 1$  개
  - (2) 원소의 개수가 2 개인 집합 :  $\left\{ \frac{1}{4}, 4 \right\}, \left\{ \frac{1}{3}, 3 \right\}, \left\{ \frac{1}{2}, 2 \right\} \Rightarrow 3$  개
  - (3) 원소의 개수가 3 개인 집합 :  $\left\{ \frac{1}{4}, 1, 4 \right\}, \left\{ \frac{1}{3}, 1, 3 \right\}, \left\{ \frac{1}{2}, 1, 2 \right\} \Rightarrow 3$  개
  - (4) 원소의 개수가 4 개인 집합 :  $\left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 3, 4 \right\}, \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4 \right\}, \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3 \right\} \Rightarrow 3$  개
  - (5) 원소의 개수가 5 개인 집합 :  $\left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 1, 3, 4 \right\}, \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4 \right\}, \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3 \right\} \Rightarrow 3$  개
  - (6) 원소의 개수가 6 개인 집합 :  $\left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3, 4 \right\} \Rightarrow 1$  개
  - (7) 원소의 개수가 7 개인 집합 :  $\left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4 \right\} \Rightarrow 1$  개
- 따라서 집합  $A$  의 개수는  $1+3+3+3+3+1+1=15$  (개)

15. 다음은 골드바흐가 생각해낸 소수에 관한 추측이다. 골드바흐의 추측을 설명한 것이 아닌 것은?

보기

[골드바흐의 추측]

2 보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다.

[배점 6, 상상]

- ①  $12 = 5 + 7$
- ②  $14 = 3 + 11$
- ③  $16 = 5 + 11$
- ④  $18 = 7 + 11$
- ⑤  $20 = 9 + 11$

해설

소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... 이므로 골드바흐의 추측을 설명한 것이 아닌 것은  $20 = 9 + 11$  이다.

16. 다음은 골드바흐가 생각해 낸 소수에 관한 추측이다.  
골드바흐의 추측을 가장 잘 설명하고 있는 식은?

보기

[골드바흐의 추측]

2 보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다.

[배점 6, 상상]

①  $7 = 3 + 4$

②  $12 = 5 + 7$

③  $14 = 5 + 9$

④  $14 = 2 + 5 + 7$

⑤  $17 = 1 + 5 + 11$

해설

소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... 이므로 골드바흐의 추측을 가장 잘 설명한 것은  $12 = 5 + 7$  이다.