단원 형성 평가

1. 48에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱하여야 할 가장 작은 자연수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

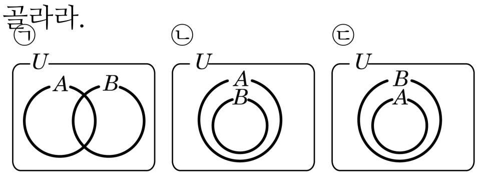
해설

48을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 48 \\ \hline 2 & 24 \\ \hline 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로 $2^4 \times 3 \times \square$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 $\square$의 값 중에서 가장 작은 자연수는 3이다.

2. 다음 벤 다이어그램 중 $B^c \subset A^c$ 인 관계를 만족하는 것을 골라라.



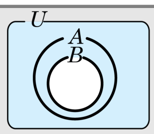
[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$A \supset B$ 일 때, 벤 다이어그램을 그리면 $B^c \subset A^c$ 이다.



3. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ 의 부분집합 중 원소가 2 개인 집합은 a 개이고, 원소가 5 개인 집합은 b 개이다. 이때, $a + b$ 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 42

해설

집합 A 의 원소 2 개를 짝짓는 방법은

$\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 4\}$, $\{1,\ 5\}$, $\{1,\ 6\}$,

$\{1,\ 7\}$,

$\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 4\}$, $\{2,\ 5\}$, $\{2,\ 6\}$, $\{2,\ 7\}$,

$\{3,\ 4\}$, $\{3,\ 5\}$, $\{3,\ 6\}$, $\{3,\ 7\}$

$\{4,\ 5\}$, $\{4,\ 6\}$, $\{4,\ 7\}$

$\{5,\ 6\}$, $\{5,\ 7\}$,

$\{6,\ 7\}$

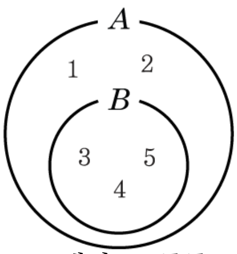
따라서, 원소가 2 개인 부분집합의 개수는

$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ (개) 이다.

집합 A 의 부분집합 중 원소가 5 개인 집합은 원소 2 개를 짝짓고 남은 5 개의 원소를 원소로 갖는 집합이므로 원소가 2 개인 부분집합의 개수와 같은 개수의 부분집합이 만들어진다. 즉 21 개가 된다.

$a = 21$, $b = 21$ 이므로 $a + b = 42$

4. 두 집합 A, B 가 다음 벤 다이어그램과 같을 때, 옳지 <u>않은</u> 것은?



[배점 4, 중중]

① $5 \in A$

② $4 \in A$

③ $\{3,\ 4\} \in A$

④ $\{3\} \subset B$

⑤ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\} \subset A$

해설

③ $\{3,\ 4\} \subset A$

5. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(U) = 40, n(A) = 18, n(A \cap B^c) = 10, n(B) = 19$ 일 때, $n(B \cap A^c)$ 은? [배점 4, 중중]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$n(A) = 18, n(A - B) = 10$ 이므로 $n(A \cap B) = 8$ 이다.

$n(B \cap A^c) = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 19 - 8 = 11$ 이다.

6. 집합 $A = \{2, 4, 6, 8\}$ 의 부분집합을 B 라고 할 때, $n(B) = 2$ 인 집합 B 의 개수를 구하여라.

[배점 5, 중상]

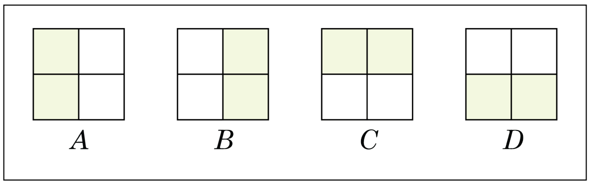
▶ 답 :

▷ 정답 : 6 개

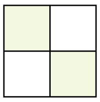
해설

원소가 2 개인 집합 A 의 부분집합은 $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$, $\{2, 8\}$, $\{4, 6\}$, $\{4, 8\}$, $\{6, 8\}$ 이므로 모두 6 개 이다.

7. 다음 그림은 각각의 집합을 도형으로 나타낸 것이다.



다음 그림을 위의 집합 A, B, C, D 와 연산 기호를 사용하여 옳게 표현한 것은?



[배점 5, 중상]

① $(A \cup B) - (A \cap B)$

② $(D \cup C) - (B \cap C)$

③ $(A \cup D) - (A \cap D)$

④ $(A - C) \cup (C - B)$

⑤ $(A - D) \cup (B - A)$

해설

$(A \cup D) - (A \cap D)$

8. A 반 학생 60 명 중에서 수학을 좋아하는 학생은 33 명, 영어를 좋아하는 학생은 30 명이고, 수학과 영어 중 한 과목만 좋아하는 학생은 29 명이라고 한다. 이때, 수학도 영어도 모두 싫어하는 학생은 몇 명인지 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 14 명

해설

(수학을 좋아하는 학생의 집합) : $n(A) = 33$,

(영어를 좋아하는 학생의 집합) : $n(B) = 30$

$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 29$,

$n(A \cap B) = (33 + 30 - 29) \div 2 = 17$,

$n(A \cup B) = 46$,

$n(U) - n(A \cup B) = 14$ (명)

9. 두 집합

$A = \{x \mid x$는 100 이상 250 이하 12의 배수$\}$,

$B = \{x \mid x$는 100 보다 작은 4의 배수$\}$ 일 때,

$n(B) - n(A)$ 를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$n(A) = 12$, $n(B) = 24$

$n(B) - n(A) = 24 - 12 = 12$

10. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e\}$ 의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A \cap B)^C = \{a,\ b,\ c\}$, $(A - B) \cap (A \cup B^C) = \{c\}$ 일 때, $n(A - B)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$U = \{a, b, c, d, e\}$ 이고 $(A \cap B)^c = \{a, b, c\}$ 이므로

$A \cap B = \{b, d\}$,

$(A - B) \cap (A \cup B^c)$

$= (A - B) \cap (A^c \cap B)^c$

$= (A - B) - (B - A)$

$= A - B$

$= \{c\}$

$\therefore n(A - B) = 1$

11. 자연수 k 에 대하여 집합 $A_k = \{x | k < x \le 20k$인 자연수$\}$ 일 때, $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_{10})$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A_1 = \{2, 3, \cdots, 20\}$

$A_2 = \{3, 4, \cdots, 40\}$

$A_3 = \{4, 5, \cdots, 60\}$

$\vdots$

$A_{10} = \{11, 12, 13, \cdots, 200\}$

$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{10} = \{11, 12, \cdots, 20\}$

$\therefore n(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{10}) = 10$

12. 원소의 개수가 40 개인 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A \cap B) = k$ 라고 할 때, $n(A) = n(A^c) = 5k,\ n(B - A) = 3k$ 이다. 이 때 $n(A^c \cap B^c)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$n(A) = n(A^c) = 5k \rightarrow n(U) = 40$ 이므로 $10k = 40,\ k = 4$ 이고,

$n(A) = 20,\ n(B - A) = 12$ 이므로 $n(A \cup B) = 32$

$\therefore n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) = 40 - 32 = 8$

13. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = n(C)$ 이고, $(A \cap B^c) \cup (B \cap C^c) = \varnothing$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? [배점 5, 상하]

① $n(A - C) = 0$

② $\dfrac{n(C)}{n(A)} \times n(B) = n(C)$

③ $n(A \cap C) = n(B)$

④ $\dfrac{n(A) + n(C)}{2} = n(B)$

⑤ $n((A \cap C) - B) = n(A \cup B \cup C)$

해설

$(A \cap B^c) \cup (B \cap C^c) = \varnothing$ 이면 $A - B = \varnothing$, $B - C = \varnothing$ 이므로 $A \subset B$, $B \subset C$

또, $n(A) = n(C)$, $A \subset C$ 이므로 $A = C$

따라서 $A = B = C$

① $n(A - C) = 0 \rightarrow A = C$ 이므로 옳다.

② $\dfrac{n(C)}{n(A)} \times n(B) = n(C) \rightarrow 1 \times n(B) = n(C)$ 이므로 옳다.

③ $n(A \cap C) = n(B) \rightarrow$옳다.

④ $\dfrac{n(A) + n(C)}{2} = n(B) \rightarrow$옳다.

⑤ $n((A \cap C) - B) = n(A \cup B \cup C) \rightarrow n((A \cap C) - B) = 0$ 이므로 옳지 않다.

14. 전체집합 $U = \{x | x$는 20 이하의 소수$\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
$A = \{x | x \leq 7, x \in U\}$ 일 때, $n(A \cap B) = 3$ 을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 64 개

해설

$U = \{x | x$는 20 이하의 소수$\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$,

$A = \{x | x \leq 7, x \in U\} = \{2, 3, 5, 7\}$,

$n(A \cap B) = 3 \rightarrow$ 집합 B 는 $\{2, 3, 5, 7\}$ 중에 세 수를 포함하고 나머지 하나는 반드시 포함하지 않는 U 의 부분집합이다.

(1) $2, 3, 5$ 는 반드시 포함하고, 7 은 반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수는 $2^{8-3-1} = 16$ (개)

(2) $2, 3, 7$ 은 반드시 포함하고, 5 는 반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수는 $2^{8-3-1} = 16$ (개)

(3) $2, 5, 7$ 은 반드시 포함하고, 3 은 반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수는 $2^{8-3-1} = 16$ (개)

(4) $3, 5, 7$ 은 반드시 포함하고, 2 는 반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수는 $2^{8-3-1} = 16$ (개)

따라서 집합 B 의 개수는 $16 \times 4 = 64$ (개)

15. $A=\{1, a, 5\}, B=\{a+1,5,7\}$ 이고 $A-B=\{1,3\}$ 일 때, $B \cap A^c$ 은? [배점 6, 상중]

① $\{4\}$ ② $\{7\}$ ③ $\{4,7\}$

④ $\{3,7\}$ ⑤ $\{2,3,7\}$

해설

$A-B=\{1,3\}$ 이므로 $a=3$ 이다. 따라서 $A=\{1,3,5\}, B=\{4,5,7\}$ 이고 $B \cap A^c=B-A=\{4,7\}$ 이다.