단원 종합 평가

1. 세 집합

$A=\{x|0<x<1, x\text{는 홀수}\}$,

$B=\{x|x\text{는 한 자리의 짝수}\}$,

$C=\{x|x\text{는 3 이하의 자연수}\}$ 일 때,

$n(A)+n(B)+n(C)$ 를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A=\{x|0<x<1, x\text{는 홀수}\}=\varnothing$ 이므로

$n(A)=0$,

$B=\{x|x\text{는 한자리의 짝수}\}=\{2,4,6,8\}$ 이므로

$n(B)=4$,

$C=\{x|x\text{는 3 이하의 자연수}\}=\{1,2,3\}$ 이므로

$n(C)=3$ 이다.

따라서 $n(A)+n(B)+n(C)=7$ 이다.

2. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A)=30$, $n(A\cup B)=56$, $n(A\cap B)=12$ 일 때, $n(B)$ 의 값을 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 38

해설

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$56=30+n(B)-12$

$n(B)=38$

3. 집합 $A=\{x\mid x=7\times n-4,\ n\text{은 자연수}\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

[배점 4, 중중]

① $3\notin A$ ② $4\in A$ ③ $7\notin A$

④ $10\notin A$ ⑤ $17\in A$

해설

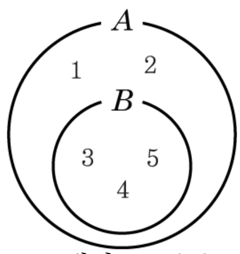
$A=\{3,\ 10,\ 17,\ \cdots\}$

① $3\in A$

② $4\notin A$

④ $10\in A$

4. 두 집합 A, B 가 다음 벤 다이어그램과 같을 때, 옳지 않은 것은?



[배점 4, 중중]

① $5\in A$

② $4\in A$

③ $\{3,\ 4\}\in A$

④ $\{3\}\subset B$

⑤ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}\subset A$

해설

③ $\{3,\ 4\}\subset A$

5. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = A$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은? [배점 4, 중중]

① $B \subset A$

② $(A \cup B) \subset A$

③ $A \subset B$

④ $(A \cap B) \cup (A \cup B) = A$

⑤ $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

$A \cup B = A$ 이면 $B \subset A$ 이다.
② $(A \cup B) \subset A, A \subset (A \cup B)$ 둘 다 성립한다.
③ $B \subset A$ 이므로 옳지 않다.
④ $A \cap B = B,\ A \cup B = A$ 이므로
$(A \cap B) \cup (A \cup B) = A$

6. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 $4, 6$ 을 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 64 개일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로 원소 4, 6 을 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-2} 개이다.
$2^{n-2} = 64,\ 2^{n-2} = 2^6$
$n - 2 = 6$ 이므로 $n = 8$

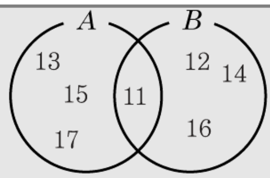
7. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{11,\ 13,\ 15,\ 17\}$, $A \cup B = \{11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17\}$, $A \cap B = \{11\}$ 일 때, 집합 B 를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

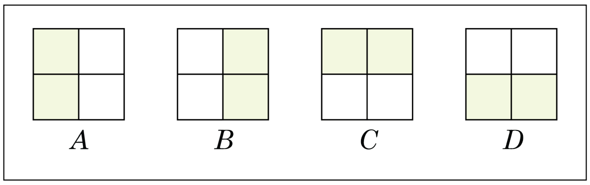
▷ 정답 : $\{11, 12, 14, 16\}$

해설

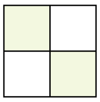
$= \{11, 12, 14, 16\}$



8. 다음 그림은 각각의 집합을 도형으로 나타낸 것이다.



다음 그림을 위의 집합 $A,\ B,\ C,\ D$ 와 연산 기호를 사용하여 옳게 표현한 것은?



[배점 5, 중상]

① $(A \cup B) - (A \cap B)$

② $(D \cup C) - (B \cap C)$

③ $(A \cup D) - (A \cap D)$

④ $(A - C) \cup (C - B)$

⑤ $(A - D) \cup (B - A)$

해설

$(A \cup D) - (A \cap D)$

9. $U = \{x|0 \le x < 15,\ x\text{는 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x|x\text{는 12 이하의 2의 배수}\}, B = \{2,3,5,7,11,13\}$ 에 대하여 $n((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))$ 을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A = \{2,4,6,8,10,12\}, B = \{2,3,5,7,11,13\}$ 이므로

$n((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))$

$= n((A - B) \cup (B - A))$

$= n(\{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}) = 10$ 이다.

10. 집합 P 에 대하여 $[A] = \{P|P \subset A\}$ 로 정의한다. $A = \{x,y,z\}$ 일 때, 집합 $[A]$ 를 원소나열법으로 나타내어라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $[A] = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{y,z\}, \{z,x\},$
$\{\{x,y,z\}$

해설

$[A] = \{P|P \subset A\}$ 라는 정의를 살펴보면 P 는 집합 A 의 부분집합이다.

따라서 $[A]$ 는 집합 A 의 부분집합들을 원소로 가진다.

$\therefore [A] = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{y,z\}, \{z,x\},$
$\{x,y,z\}\}$

11. 집합 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2m-1\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1 과 3 은 반드시 포함하고 5 와 $2m-1$ 은 포함하지 않는 부분집합의 개수가 32 개일 때 자연수 m 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2m-1\} \rightarrow\ n(A) = m$ (개)

원소 1 과 3 은 반드시 포함하고 5 와 $2m-1$ 은 반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수가 32 개이므로

$2^{m-2-2} = 32$, $m-4 = 5$

$m = 9$

12. 전체집합 $U = \{1,2,3,4,5,6\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{4,5,6\}$ 에 대하여 $B \cap X = B$, $(A-B) \cap X = \{1,3\}$ 을 만족하는 U 의 부분집합 X 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2 개

해설

$U = \{1,2,3,4,5,6\}$,

$A = \{1,2,3,4\}$,

$B = \{4,5,6\}$ 이고,

$B \cap X = B \Rightarrow B \subset X$,

$(A-B) \cap X = \{1,3\} \rightarrow \{1,2,3\} \cap X = \{1,3\}$ 이므로

X 는 원소 $1,3,4,5,6$ 을 반드시 포함하는 집합 U 의 부분집합이다.

따라서 집합 X 의 개수는 $2^{6-5} = 2$ (개)

13. 자연수 k 에 대하여 집합 $A_k = \{x | k < x \leq 20k$인 자연수$\}$ 일 때, $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_{10})$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A_1 = \{2,3,\cdots,20\}$

$A_2 = \{3,4,\cdots,40\}$

$A_3 = \{4,5,\cdots,60\}$

$\vdots$

$A_{10} = \{11,12,13,\cdots,200\}$

$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{10} = \{11,12,\cdots,20\}$

$\therefore n(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{10}) = 10$

14. 집합 A 에 대하여 $S(A)$ 는 집합 A 의 모든 원소의 합으로 정의한다.
$U = \{x \mid |x| \le 2,\ x\text{는 정수}\}$ 의 부분집합 중 원소가 2 개 이상인 부분집합을 차례로 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ 이라 할 때, $S(P_1) + S(P_2) + S(P_3) + \cdots + S(P_n)$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$U = \{x \mid |x| \le 2,\ x\text{는 정수}\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
집합 U 의 전체 부분집합을 차례대로 $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots, Q_n$ 이라 하면, 전체 부분집합에 각 원소가 각각 $2^{5-1} = 16$ 번씩 나오므로
$S(Q_1) + S(Q_2) + S(Q_3) + \cdots + S(Q_n) = 16 \times \{(-2) + (-1) + 0 + 1 + 2\} = 0$
$P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ 은 $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots, Q_n$ 에서 원소의 개수가 1 개 또는 0 개인 집합을 뺀 것이므로, $S(Q_1) + S(Q_2) + S(Q_3) + \cdots + S(Q_n)$ 에서 각 원소를 1 번씩만 더 빼 주면 $S(P_1) + S(P_2) + S(P_3) + \cdots + S(P_n)$ 의 값을 구할 수 있다.
따라서 $S(P_1) + S(P_2) + S(P_3) + \cdots + S(P_n) = 0 - \{(-2) + (-1) + 0 + 1 + 2\} = 0$

15. 전체집합 U 의 부분집합인 집합 A, B, C 의 원소의 개수는 각각 9 개, 10 개, 11 개이다. $(A - B) \cup (B^C \cup C)^C = \varnothing$ 일 때, $n(B \cap C) - n(A \cup B)$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(A - B) \cup (B^c \cup C)^c = \varnothing$ 이므로
$A - B = \varnothing \to A \subset B$
$(B^c \cup C)^c = \varnothing \to B - C = \varnothing \to B \subset C$
$\therefore n(B \cap C) - n(A \cup B) = n(B) - n(B) = 0$