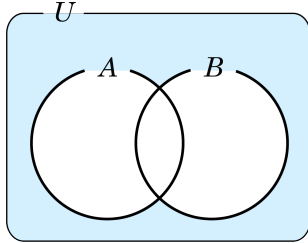


단원 종합 평가

1. 다음 벤 다이어그램에서 $n(U) = 31$, $n(A) = 23$, $n(B) = 12$, $n(A \cap B) = 6$ 일 때, 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수를 구하여라.



[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2개

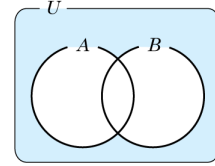
해설

주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $(A \cup B)^C$ 이다.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 23 + 12 - 6 = 29$$

$$\therefore n((A \cup B)^C) = n(U) - n(A \cup B) = 31 - 29 = 2$$

2. 다음 벤 다이어그램에서 $n(U) = 40$, $n(A) = 20$, $n(B) = 18$, $n(A \cap B) = 5$ 일 때, 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수를 구하여라.



[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

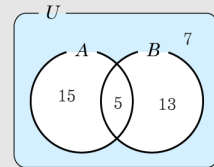
해설

색칠된 부분이 나타내는 집합은 $(A \cup B)^C$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 20 + 18 - 5 = 33$$

$$\therefore n((A \cup B)^C) = n(U) - n(A \cup B) = 40 - 33 = 7$$

[별해]



벤 다이어그램의 각 부분에 속하는 원소의 개수를 적어 보면 색칠된 부분의 원소의 개수는 7개이다.

3. $U = \{x | x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 4, 5\}, B = \{2, 3, 5\}$ 일 때, $\{(A - B) \cup A\} \cap B^c$ 은? [배점 4, 중중]

- ① $\{1\}$ ② $\{4\}$ ③ $\{1, 4\}$
 ④ $\{2, 5\}$ ⑤ $\{1, 4, 5\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A - B = \{1, 4\}$ 이므로
 $\{(A - B) \cup A\} \cap B^c = \{\{1, 4\} \cup A\} - B = \{1, 2, 4, 5\} - \{2, 3, 5\} = \{1, 4\}$ 이다.

4. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 20, n(A \cup B) = 18, n(A \cap B^c) = 7$ 일 때, $n(A^c \cap B^c)$ 은? [배점 4, 중중]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$n(A^c \cap B^c) = n(A \cup B)^c = n(U) - n(A \cup B) = 20 - 18 = 2$ 이다.

5. 200 이하의 자연수 중에서 2 의 배수 또는 3 의 배수인 수의 개수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 133 개

해설

2 의 배수인 집합을 A 라 하고, 3 의 배수인 집합을 B 라 하자.

2 의 배수이면서 3 의 배수인 집합은 $A \cap B$ 이다.
 2 의 배수이거나 3 의 배수인 수, 즉 $A \cup B$ 를 구하는 것이다.

$n(A) = 100, n(B) = 66, n(A \cap B) = 33$ 이므로

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$x = 100 + 66 - 33$

$x = 133$

6. 두 집합 $A = \{x | x \text{는 } 15 \text{ 이하의 소수}\}, B = \{x | x \text{는 } 5 \text{ 미만의 소수}\}$ 에 대하여 $B \subset X \subset A$ 를 만족하는 X 의 개수를 모두 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 16 개

해설

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}, B = \{2, 3\}$

집합 X 는 원소 2 와 3 을 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 부분집합의 개수는

$2^{6-2} = 2^4 = 16$ (개)

7. 자연수들로 이루어진 두 집합 X, Y 에 대하여 $X+Y = \{x+y | x \in X, y \in Y\}$ 라 하자.

$X = \{3, 6, 9, \dots\}, Y = \{5, 10, 15, \dots\}$ 이라 할 때, 집합 $X+Y$ 의 원소 중에서 20 이하의 자연수의 개수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 9개

해설

$X+Y$ 가 20 이하인 수는

$x=3$ 일 때, $y=5, 10, 15$ 의 3가지이고

$x=6, 9$ 일 때, $y=5, 10$ 의 각각 2가지이고

$x=12, 15$ 일 때, $y=5$ 의 각각 1가지이다. 따라서 모두 9개이다.

8. 다음 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 24 \text{의 약수}\}, B = \{1, 3, 8, a \times 3, 2, b+3, c, 12\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 일 때, 자연수 a 가 될 수 있는 최댓값과 최솟값의 차이를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$,

$B = \{1, 2, 3, 8, 12, a \times 3, b+3, c\}$ 이므로,

$a \times 3, b+3, c$ 는 각각 4, 6, 24 중 하나여야 한다.

$a \times 3 = 4$ 일 때 a 값이 최소가 되고, $a \times 3 = 24$ 일 때 a 값이 최대가 되지만, $a \times 3 = 4$ 일 때의 a 값은 자연수가 아니므로 부적합하다.

따라서 a 값이 최소일 때는 $a \times 3 = 6$ 일 때이다.

최댓값 : $a = 8$

최솟값 : $a = 2$

따라서 $8 - 2 = 6$

9. 세 집합 $A = \{x \mid x = 2 \times n - 1, n \text{은 자연수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 20미만의 소수}\}$, $C = \{x \mid x \text{는 18의 약수}\}$ 에 대하여 $B \cup (C \cap A)$ 의 모든 원소의 합을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 87

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고치면 $A = \{2 \times 1 - 1, 2 \times 2 - 1, 2 \times 3 - 1, \dots\} = \{1, 3, 5, \dots\}$ 즉 홀수의 집합과 일치한다.

$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, $C = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ 이다.

먼저 C 와 A 의 교집합을 구하면 $\{1, 3, 9\}$ 이다.

$B \cup (C \cap A) = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$

따라서 모든 원소의 합을 구하면 $1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 17 + 19 = 87$

10. 집합 P 에 대하여 $[A] = \{P \mid P \subset A\}$ 로 정의한다.

$A = \{x, y, z\}$ 일 때, 집합 $[A]$ 를 원소나열법으로 나타내어라.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: $[A] = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\}, \{x, y, z\}\}$

해설

$[A] = \{P \mid P \subset A\}$ 라는 정의를 살펴보면 P 는 집합 A 의 부분집합이다.

따라서 $[A]$ 는 집합 A 의 부분집합들을 원소로 가진다.

$\therefore [A] = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\}, \{x, y, z\}\}$

11. 두 집합 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ 에 대하여 집합 $C = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ 일 때, 집합 C 의 원소의 개수를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 8개

해설

$A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ 이고 집합 $C = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ 라면,

집합 A , B 의 원소를 하나씩 서로 곱한 값이 집합 C 의 원소가 된다.

따라서 집합 $C = \{2, 4, 6, 10, 12, 18, 20, 30\}$ 이므로 $n(C) = 8$

12. 세 집합 $A = \{x \mid x \text{는 한국인}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 학생}\}$, $C = \{x \mid x \text{는 여자}\}$ 에 대하여 한국의 남학생을 나타내는 집합을 모두 고르면?

[배점 5, 상하]

① $(A \cup B) - C$

② $A \cup B \cup C$

③ $(A \cap B) - C$

④ $A \cap B \cap C^c$

⑤ $(A - B)^c \cap C^c$

해설

한국 학생 중 여학생을 뺀 것 또는 한국 학생 중 여자가 아닌 사람이므로

$(A \cap B) - C$ 또는 $A \cap B \cap C^c$ 이다.

13. 1 학년 1 반 학생 45 명 중 수박을 좋아하는 학생이 35 명, 자두를 좋아하는 학생이 27 명이다. 수박과 자두를 모두 좋아하는 학생 수의 최대값과 최소값을 각각 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최대값 : 27 명

▷ 정답 : 최소값 : 17 명

해설

1 학년 1 반의 학생의 집합을 U , 수박을 좋아하는 학생의 집합을 A , 자두를 좋아하는 학생의 집합을 B 라 두면, 수박과 자두를 모두 좋아하는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이고,

$n(U) = 45, n(A) = 35, n(B) = 27$ 이다.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \leq 45$ 이므로,

$17 \leq n(A \cap B) \leq 27$

따라서 수박과 자두를 모두 좋아하는 학생 수의 최대값과 최소값은 각각 27 명과 17 명

14. 전체집합 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 9\}$, $A - (A - B) = \{1\}$ 을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8 개

해설

$$\begin{aligned} A - (A - B) &= A \cap (A \cap B^C)^C \\ &= A \cap (A^C \cup B) = (A \cap A^C) \cup (A \cap B) \\ &= (A \cap B) = \{1\} \end{aligned}$$

$A = \{1, 9\}$, $(A \cap B) = \{1\}$, $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 을 만족하는

집합 B 는 원소 1 을 반드시 포함하고 원소 9 를 반드시 포함하지 않으므로

집합 B 의 개수는 $2^3 = 8(\text{개})$

15. 집합 $A_n = \{x | n \leq x < 6n + 5, n \text{은 자연수}\}$ 에 대하여 $S(n) = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ 이라고 정의한다. $n(S(n)) \geq 1$ 을 만족하는 n 의 최댓값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$A_1 = \{x | 1 \leq x < 11\},$$

$$A_2 = \{x | 2 \leq x < 17\},$$

$$A_3 = \{x | 3 \leq x < 23\},$$

$\vdots$

$$A_{10} = \{x | 10 \leq x < 65\},$$

$$A_{11} = \{x | 11 \leq x < 71\},$$

따라서 $n \geq 11$ 이 되면 $n(S(n)) = 0$ 이 되므로 n 의 최댓값은 10