

문제 풀이 과제

1. 두 집합 $A = \{x | x \text{는 } 24 \text{의 약수}\}$, $B = \{x | x \text{는 } 28 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $n(A \cap B)$ 를 구하여라.
[배점 2, 하중]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \\ B &= \{1, 2, 4, 7, 14, 28\} \\ A \cap B &= \{1, 2, 4\} \\ n(A \cap B) &= 3 \end{aligned}$$

2. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 10 \text{이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A^c = \{4, 5, 7\}$, $B^c = \{3, 4, 6, 8\}$ 일 때, $A \cap B$ 를 구하여라.
[배점 2, 하중]

▶ 답:

▷ 정답: $\{1, 2, 9, 10\}$

해설

$$\begin{aligned} A &= (A^c)^c = \{1, 2, 3, 6, 8, 9, 10\} \\ B &= (B^c)^c = \{1, 2, 5, 7, 9, 10\} \\ \therefore A \cap B &= \{1, 2, 9, 10\} \end{aligned}$$

3. $\{x | x \text{는 'mathematics'에 있는 알파벳의 모임}\}$ 을 원소나열법으로 나타내어라. [배점 2, 하중]

▶ 답:

▷ 정답: $\{a, c, e, h, i, m, s, t\}$

해설

$$\{x | x \text{는 'mathematics'에 있는 알파벳의 모임}\} = \{m, a, t, h, e, i, c, s\}$$

4. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이다. 집합 $A = \{x | x \text{는 } 3 \text{보다 크고 } 10 \text{보다 작은 짝수}\}$ 일 때, B 의 원소의 개수를 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: 3개

해설

$A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.
 $A = \{4, 6, 8\}$ 이므로 $B = \{4, 6, 8\}$
따라서 $n(B) = 3$ 이다.

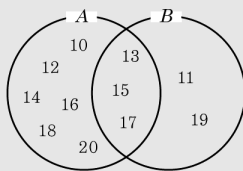
5. 집합 $B = \{x | x \text{는 } 10 \text{이상 } 20 \text{미만의 홀수}\}$, $A \cap B = \{13, 15, 17\}$,
 $A \cup B = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ 일 때
 집합 A를 구하면? [배점 3, 하상]

- ① $\{13, 15\}$
 ② $\{13, 15, 17, 19, 20\}$
 ③ $\{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
 ④ $\{10, 14, 16, 18\}$
 ⑤ $\{10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20\}$

해설

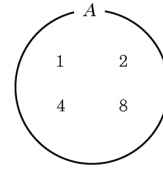
조건제시법을 원소나열법으로 고쳐보면 $B = \{11, 13, 15, 17, 19\}$ 가 된다.

$A \cup B = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$,
 $A \cap B = \{13, 15, 17\}$ 가 성립하도록 벤 다이어그램에 그려보자.



그러므로 $A = \{10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20\}$ 이다.

6. 다음 그림의 집합 A 를 조건제시법으로 나타내면?



[배점 3, 하상]

- ① $\{x | x \text{는 } 2 \text{의 배수}\}$ ② $\{x | x \text{는 } 4 \text{의 배수}\}$
 ③ $\{x | x \text{는 } 8 \text{의 배수}\}$ ④ $\{x | x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$
 ⑤ $\{x | x \text{는 } 10 \text{의 약수}\}$

해설

$A = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로 조건제시법으로 나타내면 $\{x | x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$ 이다.

7. 전체집합 U 와 두 부분집합 A, B 에 대하여

$U = A \cup B$, $A = \{x | x \text{는 } 40 \text{의 약수}\}$, $B = \{x | x \text{는 } 25 \text{의 약수}\}$ 일 때, $(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B)$ 의 원소의 개수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 2 개

해설

$A = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$

$B = \{1, 5, 25\}$

$A \cap B = \{1, 5\}$

8. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이고, $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{5, 6\}$ 일 때, $n(A - B)^c$ 의 값은?
[배점 3, 중하]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{5, 6\}$ 에서 $A - B = \{1, 2, 3\}$ 이다.

따라서 $(A - B)^c = U - (A - B) = \{4, 5, 6\}$ 이다.

$$\therefore n((A - B)^c) = 3$$

9. 48에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱하여야 할 가장 작은 자연수를 구하여라.
[배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 정답: 3

해설

48을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 48} \\ 2 \overline{) 24} \\ 2 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 6} \\ 3 \end{array}$$

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로 $2^4 \times 3 \times \square$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 $\square$ 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 3이다.

10. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $A \subset B$

㉡ $n(B) - n(A) = \{5, 6\}$

㉢ $n(A) < n(B)$

㉣ $n(A) \subset n(B)$

㉤ $B \not\subset A$

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 정답: ㉠

▶ 정답: ㉢

▶ 정답: ㉤

해설

㉡ $n(B) - n(A) = 2$

㉣ $n(A) \not\subset n(B)$

11. 두 집합 $A = \{2, 5, a + 3\}$, $B = \{b - 3, 5, 9\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.
[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 11

해설

$A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.
 $A = B$ 이므로 $a + 3 = 9$, $b - 3 = 2$
 따라서 $a = 6$, $b = 5$
 $\therefore a + b = 11$

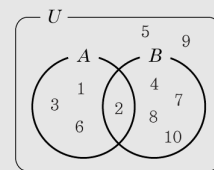
12. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의
 두 부분집합 $A = \{x | x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$, $B = \{2, 4, 7, 8, 10\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

[배점 4, 중중]

- ① $A^c \cap B^c = \{5, 8, 9\}$
 ② $n(A \cup B) = 6$
 ③ $A - B = \{1, 3, 6\}$
 ④ $A^c = \{4, 5, 7, 8, 9\}$
 ⑤ $n((A \cap B)^c) = 3$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{2, 4, 7, 8, 10\}$ 이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



- ① $A^c \cap B^c = \{5, 9\}$
 ② $n(A \cup B) = 8$
 ④ $A^c = \{4, 5, 7, 8, 9, 10\}$
 ⑤ $n((A \cap B)^c) = 2$

13. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{2, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 15, 16\}$, $B = \{1, 3, 8, 10, 13, 16\}$ 이고 $B \cap X = X, (A \cap B) \cup X = X$ 를 만족할 때 다음 중 옳지 않은 것은? (정답 2 개)
[배점 5, 중상]

- ① $B \subset X$ ② $X \subset (A \cup B)$
③ $(A \cap B) \subset X \subset B$ ④ $(A \cap B) \subset X \subset A$
⑤ $\{10, 13\} \subset X$

해설

$B \cap X = X$ 일 때 $X \subset B$ 이고 $(A \cap B) \cup X = X$ 이면 $(A \cap B) \subset X$ 을 만족한다.

- ① $X \subset B$ 이므로 옳지 않다.
④ $(A \cap B) \subset X \subset B$ 이지만 $X \subset A$ 라고 할 수 없기 때문에 $(A \cap B) \subset X \subset A$ 이라고 할 수 없다.
⑤ $\{10, 13\} \subset A \cap B$ 이므로 $\{10, 13\} \subset X$ 이다.

14. 우리 반 학생 40 명 중에서 영어 학원을 다니는 학생은 25 명, 수학 학원을 다니는 학생은 21 명이라면, 두 과목 모두 학원을 다니는 사람 수의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 27 명

해설

문제에서 $A \cup B$ 이 주어지고 있다. 우리 반 학생 40 명이 $A \cup B$ 이다.

영어 학원을 다니는 학생을 집합 A 라고 하고, 수학 학원을 다니는 학생은 집합 B 라고 한다.

영어, 수학 학원을 모두 다니는 학생은 $A \cap B$ 가 된다.

$A \cap B$ 의 최솟값과 최댓값을 구해 보자.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$40 = 25 + 21 - x$$

x 의 최솟값은 6 이다.

최댓값은 수학 학원을 다니는 학생이 영어 학원을 다니는 학생에 포함될 때 성립한다.

그러므로 x 의 최댓값은 21(명) 이다.

최솟값과 최댓값의 합은 27(명) 이다.

15. 집합 $A = \{2, 3 \times a, a + 3\}$, $B = \{a, 2 \times a + 1, 3 \times a - 2\}$ 이고 $A - B = \{6\}$ 일 때, $C = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 $(A - C) \cup (B \cap C)$ 는?
[배점 5, 중상]

- ① $\{2, 4\}$ ② $\{2, 5\}$ ③ $\{2, 6\}$
④ $\{2, 5, 6\}$ ⑤ $\{2, 6, 7\}$

해설

$A - B = \{6\}$ 이므로

(1) $3 \times a = 6$ 일 때, $a = 2$ 이다.

따라서 $A = \{2, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 5\}$ 이고 $C = \{1, 2, 3\}$ 이므로

$(A - C) \cup (B \cap C) = \{5, 6\} \cup \{2\} = \{2, 5, 6\}$ 이다.

(2) $a + 3 = 6$ 일 때, $a = 3$ 이다.

따라서 $A = \{2, 6, 9\}$, $B = \{3, 7\}$ 이므로 $A - B = \{2, 6, 9\} \neq \{6\}$ 이므로 조건에 맞지 않다.

따라서 (1), (2) 에서 $(A - C) \cup (B \cap C) = \{5, 6\} \cup \{2\} = \{2, 5, 6\}$ 이다.

16. 집합 $A_n = \{x | 2n - 1 \leq x \leq 2n + 1, n \text{은 자연수}\}$ 에 대하여 $n(A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup \dots \cup A_{10})$ 의 값을 구하여라.
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$$A_3 = \{x | 5 \leq x \leq 7\},$$

$$A_4 = \{x | 7 \leq x \leq 9\},$$

$$A_5 = \{x | 9 \leq x \leq 11\},$$

⋮

$$A_{10} = \{x | 19 \leq x \leq 21\},$$

$$A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup \dots \cup A_{10} = \{x | 5 \leq x \leq 21\},$$

$$\therefore n(A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup \dots \cup A_{10}) = 17$$

17. 집합 $A = \{1, 2, 4, 8, \dots, 2^m\}$ 의 부분집합 중에서 1 과 2 는 반드시 포함하고, 2 를 제외한 짝수 번째 원소들은 포함하지 않는 부분집합의 개수가 64 개일 때, 자연수 m 의 값을 구하여라.
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

1 과 2 는 반드시 포함하고 2 를 제외한 짝수 번째 원소들의 개수 $\frac{m}{2} - 1$ (개) 는 반드시 포함하지 않

으므로

$$2^{m-2-(\frac{m}{2}-1)} = 64 \text{ 이므로}$$

$$m - 2 - (\frac{m}{2} - 1) = 6, \quad \frac{m}{2} - 1 = 6,$$

$$m = 14$$

18. 집합 $S = \{x \mid x \text{는 자연수}\}$ 의 부분집합 $A = \{x \mid x \in A \text{이면 } 5 - x \in A\}$ 가 있다. 집합 A 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 3개

해설

자연수 전체집합의 부분집합인 A 가 $A = \{x \mid x \in A \text{이면 } 5 - x \in A\}$ 라는 조건을 가질 때,
집합 A 의 원소가 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, 4이다.
조건을 이용하면 1과 4, 2와 3은 반드시 동시에 원소가 되어야 하므로
집합 A 는 $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 3개의 경우가 가능하다.

19. 중학생 120명을 대상으로 수학, 과학, 영어 중 자신 있어 하는 과목을 선택하게 하였더니, 수학을 선택한 학생은 33명, 과학을 선택한 학생은 40명, 영어를 선택한 학생은 36명이었다. 또, 두 과목을 선택한 학생은 모두 34명, 세 과목을 모두 선택한 학생은 9명이었다. 세 과목 중 어떤 과목도 선택하지 않은 학생 수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: 63명

해설

중학생 전체의 집합을 U , 수학을 선택한 학생의 집합을 A , 과학을 선택한 학생의 집합을 B , 영어를 선택한 학생의 집합을 C 라 하면,
두 과목을 선택한 학생 수는 $n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3n(A \cap B \cap C)$,
세 과목을 모두 선택한 학생 수는 $n(A \cap B \cap C)$,
세 과목 중 어떤 과목도 선택하지 않은 학생 수는 $n((A \cup B \cup C)^c)$,
 $n(U) = 120, n(A) = 33, n(B) = 40, n(C) = 36, n(A \cap B \cap C) = 9$,
 $n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3n(A \cap B \cap C) = 34$ 이므로,
 $n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 34 + 27 = 61$,
 $n(A \cup B \cup C)$
 $= n(A) + n(B) + n(C) - (n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + n(A \cap B \cap C)$
 $= 33 + 40 + 36 - 61 + 9 = 57$
 $\therefore n((A \cup B \cup C)^c) = n(U) - n(A \cup B \cup C) = 120 - 57 = 63$

20. $n(U) = 50$ 인 전체집합 U 의 부분집합 A, B, C 가 다음과 같은 조건을 만족할 때,

$n((A - B) - C) + n((B - C) - A) + n((C - A) - B)$ 를 구하여라.

- $n(A) + n(B) + n(C) = 80, n((A \cup B \cup C)^c) = 5$
- $n(A - B) = 10, n(B - C) = 15, n(C - A) = 17$

[배점 6, 상중]

▶ 답:

▶ 정답: 13

해설

$n(U) = 50, n((A \cup B \cup C)^c) = 5 \rightarrow n(A \cup B \cup C) = 45$,
 $A - B, B - C, C - A$ 는 서로소이므로,
 $n(A - B) + n(B - C) + n(C - A) = n(A \cup B \cup C) - n(A \cap B \cap C)$
 $\rightarrow 42 = 45 - n(A \cap B \cap C) \rightarrow n(A \cap B \cap C) = 3$
 $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$ 이므로,
 $45 = 80 - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + 3$
 $\rightarrow n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 38$
 $\therefore n((A - B) - C) + n((B - C) - A) + n((C - A) - B)$
 $= n(A \cup B \cup C) -$
 $(n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) +$
 $2n(A \cap B \cap C)$
 $= 45 - 38 + 6 = 13$

21. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 20 \text{ 이하의 소수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여

$A = \{x | x \leq 7, x \in U\}$ 일 때, $n(A \cap B) = 3$ 을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▶ 정답: 64 개

해설

$U = \{x | x \text{는 } 20 \text{ 이하의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$,
 $A = \{x | x \leq 7, x \in U\} = \{2, 3, 5, 7\}$,
 $n(A \cap B) = 3 \rightarrow$ 집합 B 는 $\{2, 3, 5, 7\}$ 중에 세 수를 포함하고 나머지 하나는 반드시 포함하지 않는 U 의 부분집합이다.
(1) 2, 3, 5 는 반드시 포함하고, 7 은 반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수는 $2^{8-3-1} = 16$ (개)
(2) 2, 3, 7 은 반드시 포함하고, 5 는 반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수는 $2^{8-3-1} = 16$ (개)
(3) 2, 5, 7 은 반드시 포함하고, 3 은 반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수는 $2^{8-3-1} = 16$ (개)
(4) 3, 5, 7 은 반드시 포함하고, 2 는 반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수는 $2^{8-3-1} = 16$ (개)
따라서 집합 B 의 개수는 $16 \times 4 = 64$ (개)