

확인 테스트

1. 다음 중 옳지 않은 것은?

[배점 2, 하중]

- ① 1 은 소수가 아니다.
- ② 10 은 합성수이다.
- ③ 17 은 소수이다.
- ④ 약수가 2 개인 수는 소수이다.
- ⑤ 두 소수의 합은 언제나 홀수이다.

해설

⑤ (반례) 3 과 5 는 소수이지만 두 소수의 합인 8 은 짝수이다.

2. 다음 자연수 중 소수가 아닌 것을 모두 고르면?

[배점 2, 하중]

- ① 1 ② 2 ③ 5 ④ 7 ⑤ 14

해설

- ① 1 은 소수도 합성수도 아니다.
- ⑤ 14 는 합성수이다.

3. $3^a \times 5^b$ 이 $3^3 \times 5$ 를 약수로 가질 때, 두 자연수 a, b 의 최솟값의 합을 구하여라.

[배점 3, 하상]

➤ 4

해설

$3^a \times 5^b$ 이 $3^3 \times 5$ 를 약수로 가지므로, a 는 3 이상의 자연수, b 는 1 이상의 자연수가 되어야 한다.
그 중 최솟값은 $a = 3, b = 1$ 일 때이다.

4. $5^6 \times \square$ 의 약수의 개수가 21 개일 때, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 자연수 중 가장 작은 것은?

[배점 3, 하상]

- ① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

해설

$$21 = 7 \times 3 = (6 + 1) \times (2 + 1)$$

$\square$ 에 알맞은 가장 작은 자연수는 $2^2 = 4$

$\therefore 4$

5. 180의 약수의 개수와 $2 \times 3^2 \times 5^a$ 의 약수의 개수가 같을 때, 자연수 a 의 값을 구하여라. [배점 3, 하상]

 2

해설

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$, 180의 약수의 개수:

$$(2+1) \times (2+1) \times (1+1) = 18$$

$2 \times 3^2 \times 5^a$ 의 약수의 개수:

$$(1+1) \times (2+1) \times (a+1) = 18$$

$$\therefore a = 2$$

6. 자연수 $2^3 \times 3^a$ 의 약수의 개수가 12일 때, a 의 값을 구하여라. [배점 3, 하상]

 2

해설

$$(3+1)(a+1) = 12$$

$$a+1 = 3$$

$$\therefore a = 2$$

7. 다음 중 자연수 84를 바르게 소인수분해한 것은?

[배점 3, 하상]

① $2^3 \times 3 \times 7$

② $2 \times 3^2 \times 7$

③ $2^2 \times 3^2 \times 5$

④ $2^2 \times 3^3 \times 7$

⑤ $2^2 \times 3 \times 7$

해설

$$2 \overline{) 84}$$

$$2 \overline{) 42}$$

$$3 \overline{) 21}$$

$$7$$

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

8. 다음 수 중 어떤 자연수의 제곱이 되는 수는?

[배점 3, 하상]

① 27

② 44

③ 2×3^2

④ $2^2 \times 3 \times 5^2$

⑤ $2^4 \times 7^2$

해설

⑤ 지수가 모두 짝수이므로 자연수의 제곱이 되는 수이다.

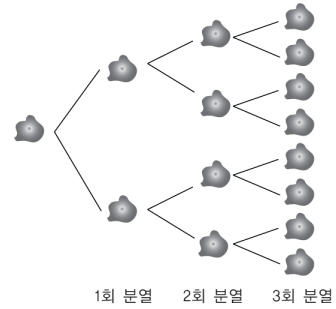
9. 다음 중 옳지 않은 것은? [배점 3, 하상]

- ① 2 는 소수이다.
- ② 1 과 그 수 자신만의 약수를 가지는 자연수를 소수라 한다.
- ③ 1 은 소수가 아니다.
- ④ 합성수는 약수가 3 개 이상인 수이다.
- ⑤ 소수는 약수가 1 개뿐이다.

해설

소수는 약수가 2 개이다.

10.아메바는 둘로 분열하는 과정을 통해 번식을 한다. 아메바가 한 마리가 다음 그림과 같이 분열을 반복할 때, 전체 아메바가 50 마리 이상이 되려면 아메바가 최소 몇 회 분열을 하여야 하는가? (단, 아메바는 각각 한 번씩만 분열하는 것으로 가정한다.)



[배점 3, 중하]

- ① 4 회 ② 5 회 ③ 6 회
- ④ 7 회 ⑤ 8 회

해설

아메바 한 마리가 1 회 분열을 하면 2 마리가 생성되어 전체 아메바는 $1 + 2 = 3$ (마리)가 된다. 아메바는 각각 한 번씩만 분열하므로 2 회 분열에서는 새로 생성된 2 마리만 각자 분열을 하여 $2 \times 2 = 4$ (마리)가 더 생성된다. 따라서 총 마리수는 $1 + 2 + 2^2 = 7$ (마리)가 된다. 그 다음 3 회 분열을 하면 $1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 15$ (마리)가 된다. 이런 방식으로 분열이 진행될 때마다의 총 마리수를 표로 정리하면 다음과 같다.

분열	총 마리 수 (마리)
1회 분열	7
2회 분열	9
3회 분열	3
4회 분열	1
5회 분열	7
⋮	⋮

따라서 최소 5 회 분열을 해야 아메바의 총 마리수가 50 마리 이상이 된다.

11. 다음 중 180 의 약수는? [배점 3, 중하]

- ① $2^3 \times 5$ ② $3^2 \times 7$
 ③ $2^2 \times 3 \times 5$ ④ $3^3 \times 5 \times 7$
 ⑤ $2^2 \times 3^3 \times 7$

해설

180 을 소인수분해하면 $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ 이다.

12. 태환이가 오늘 배운 소인수분해를 이용하여 $3^3 \times 10 \times 5^2$ 의 약수의 개수를 구하는 과정을 다음과 같이 수학 공책에 적었다. 밑줄 친 부분 중 틀린 부분을 말하여라.

문제) $3^3 \times 10 \times 5^2$ 의 약수의 개수 구하기
 풀이)
 ㉠ 10 을 소인수분해하면 2×5 이므로
 ㉡ $3^3 \times 10 \times 5^2 = 2 \times 3^3 \times 5^3$
 ㉢ 약수의 개수를 구할 때, 각 지수에 1 을 더하여 곱하면
 ㉣ $(0+1) \times (3+1) \times (3+1) = 16(\text{개})$ 이다.

[배점 3, 중하]

> ㉣

해설

㉣ $2 \times 3^3 \times 5^3$ 에서 2, 3^3 , 5^3 의 지수는 각각 1, 3, 3 이므로 약수의 개수는 $(1+1) \times (3+1) \times (3+1) = 32$ (개) 이다.

13. 다음 중 60 과 약수의 개수가 같은 것은?

[배점 3, 중하]

- ① 5^8 ② $2^2 \times 3^5$
 ③ $5^2 \times 11 \times 19$ ④ $3^5 \times 5^2$
 ⑤ $3 \times 5 \times 7^3$

해설

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ 이므로 약수의 개수는 $(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12$ (개) 이다.

각각의 약수의 개수를 구하면 다음과 같다.

- ① $8+1=9$ (개)
 ② $(2+1) \times (5+1) = 18$ (개)
 ③ $(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12$ (개)
 ④ $(5+1) \times (2+1) = 18$ (개)
 ⑤ $(1+1) \times (1+1) \times (3+1) = 16$ (개)

14. 다음 중 약수의 개수가 서로 다른 두 수로 짝지어진 것은? [배점 3, 중하]

- ① $8, 3^3$ ② $21, 5 \times 7$
 ③ $45, 2^2 \times 3$ ④ $100, 2^{10}$
 ⑤ $72, 3 \times 5 \times 7^2$

해설

- ① $8 = 2^3$ 이므로 약수의 개수는 $3 + 1 = 4$ (개) 이고, 3^3 의 약수의 개수도 $3 + 1 = 4$ (개) 이다.
 ② $21 = 3 \times 7$ 이므로 약수의 개수는 $(1 + 1) \times (1 + 1) = 4$ (개) 이고, 5×7 의 약수의 개수는 $(1 + 1) \times (1 + 1) = 4$ (개) 이다.
 ③ $45 = 3^2 \times 5$ 의 약수의 개수는 $(2 + 1) \times (1 + 1) = 6$ (개) 이고, $2^2 \times 3$ 의 약수의 개수는 $(2 + 1) \times (1 + 1) = 6$ (개) 이다.
 ④ $100 = 2^2 \times 5^2$ 의 약수의 개수는 $(2 + 1) \times (2 + 1) = 9$ (개) 이고, 2^{10} 의 약수의 개수는 $10 + 1 = 11$ (개) 이다.
 ⑤ $72 = 2^3 \times 3^2$ 의 약수의 개수는 $(3 + 1) \times (2 + 1) = 12$ (개) 이고, $3 \times 5 \times 7^2$ 의 약수의 $(1 + 1) \times (1 + 1) \times (2 + 1) = 12$ (개) 이다.

15. $2^3 \times \square$ 의 약수의 개수가 8 개일 때, 다음 중 $\square$ 안에 들어 갈 수 없는 수를 모두 고르면? [배점 3, 중하]

- ① 3 ② 4 ③ 7 ④ 9 ⑤ 16

해설

- ② $2^3 \times 4 = 2^3 \times 2^2 = 2^5$ 이므로 약수의 개수는 $5 + 1 = 6$ (개) 이다.
 ④ $2^3 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ 이므로 약수의 개수는 $(3 + 1) \times (2 + 1) = 12$ (개) 이다.

16. 다음 중 약수의 개수가 가장 적은 것은?

[배점 3, 중하]

- ① $19^3 \times 31$ ② 2×5^4
 ③ $3^2 \times 7 \times 11$ ④ $3^2 \times 11^2 \times 13$
 ⑤ 19^9

해설

각각의 약수의 개수를 구하면 다음과 같다.

- ① $(3 + 1) \times (1 + 1) = 8$ (개)
 ② $(1 + 1) \times (4 + 1) = 10$ (개)
 ③ $(2 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 12$ (개)
 ④ $(2 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 18$ (개)
 ⑤ $9 + 1 = 10$ (개)

17. 다음 수 중에서 소수는 모두 몇 개인지 구하여라.

1 2 5 9 13 15 19 26 52 [배점 3, 중하]

> 4개

해설

주어진 수 중에서 소수는 2, 5, 13, 19 이다.

18. 다음 중 350 의 약수가 아닌 것은? [배점 4, 중중]

① 2 ② 2×5 ③ 2×7

④ $2^2 \times 5^2$ ⑤ $2 \times 5^2 \times 7$

해설

$350 = 2 \times 5^2 \times 7$ 이므로 ④ $2^2 \times 5^2$ 은 약수가 아니다.

19. $\square \times 5^4$ 는 약수의 개수가 20 인 가장 작은 자연수이다. $\square$ 안에 알맞은 수를 구하여라.

[배점 4, 중중]

> 8

해설

$(\square) \times 5^4$ 에서 $(\square) = a^x$ 이라 하면 약수의 개수는 $(x+1) \times (4+1) = 20$ (개) 이므로

$$(x+1) \times (4+1) = (x+1) \times 5 = 20$$

$$x+1 = 4 \quad \therefore x = 3$$

a 가 될 수 있는 가장 작은 소인수는 2 이므로

$$\square = 2^3 = 8$$

20.1 부터 50 사이의 수 중에서 약수의 개수가 3 인 수는 모두 몇 개인지 구하여라. [배점 4, 중중]

> 4개

해설

약수의 개수가 3 개인 수는

(소수)² 이므로

50 이하의 수 중 소수의 제곱이 되는 수는

$2^2, 3^2, 5^2, 7^2$ 의 4 개

21. 다음 <보기> 중 소인수분해를 올바르게 한 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $45 = 3^2 \times 5$
- ㉡ $28 = 2^2 \times 7$
- ㉢ $150 = 2 \times 3^2 \times 7$
- ㉣ $512 = 2^9$
- ㉤ $72 = 2^2 \times 3^3$
- ㉥ $96 = 2^5 \times 3$

[배점 4, 중중]

- ① ㉠, ㉡, ㉢, ㉣
- ② ㉡, ㉢, ㉤, ㉥
- ③ ㉠, ㉡, ㉣, ㉥
- ④ ㉡, ㉣, ㉤, ㉥
- ⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉥

해설

- ㉢ $150 = 2 \times 3 \times 5^2$
- ㉥ $72 = 2^3 \times 3^2$

22. 다음 중 52 을 소인수분해한 것으로 알맞은 것은?

[배점 4, 중중]

- ① 2×3^3
- ② $2^3 \times 7$
- ③ 2×5^2
- ④ $2^2 \times 13$
- ⑤ $2^2 \times 3 \times 7$

해설

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 52} \\ 2 \overline{) 26} \\ 13 \\ 52 = 2^2 \times 13 \end{array}$$

23. 다음 수를 약수의 개수가 적은 것부터 순서대로 나열한 것은?

보기

- ㉠ $2^5 \times 3$
- ㉡ $2^4 \times 5^2$
- ㉢ $2 \times 3 \times 7$
- ㉣ $2 \times 3 \times 5 \times 11$
- ㉤ $3^2 \times 5^3 \times 7$

[배점 4, 중중]

- ① ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤
- ② ㉡, ㉢, ㉠, ㉤, ㉣
- ③ ㉢, ㉠, ㉡, ㉣, ㉤
- ④ ㉢, ㉡, ㉤, ㉣, ㉠
- ⑤ ㉣, ㉠, ㉤, ㉡, ㉢

해설

㉠ 12 개 ㉡ 15 개 ㉢ 8 개 ㉣ 16 개 ㉤ 24 개
따라서 ㉢, ㉠, ㉡, ㉣, ㉤ 순서이다.

24. 72 에 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱을 만들려고 한다. 이 때, 곱할 수 있는 가장 작은 두 자리의 자연수를 구하여라. [배점 4, 중중]

> 18

해설

$72 \times n = 2^3 \times 3^2 \times n = m^2$ 이라 하면
가장 작은 $n = 2$
따라서 n 은
 $2 \times 1^2 = 2$
 $2 \times 2^2 = 8$
 $2 \times 3^2 = 18$
 $2 \times 4^2 = 32$
그러므로 가장 작은 두 자리의 자연수 n 은 18 이다.

25. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?(정답 2 개) [배점 4, 중중]

- ① 10 이하의 소수는 모두 5 개이다.
- ② 1 은 소수이다.
- ③ 모든 소수는 자신을 약수로 갖는다.
- ④ 합성수는 3 개 이상의 약수를 갖는다.
- ⑤ 소수는 짝수가 없다.

해설

- ① 10 이하의 소수는 2, 3, 5, 7 이다.
- ② 1 은 소수도 합성수도 아니다.
- ⑤ 2 는 소수이다.

26. 7^{100} 을 계산하면 85 자리의 수가 된다. 이 수의 일의 자리의 수를 구하여라. [배점 5, 중상]

> 1

해설

7 의 거듭제곱 수마다 일의 자리 수를 구해보면 7, 9, 3, 1 이 반복되는 것을 알 수 있다.

7의 거듭제곱수	일의 자리 수
$7^1 (=7)$	7
$7^2 (=7 \times 7=49)$	9
$7^3 (=7 \times 7 \times 7=343)$	3
$7^4 (=7 \times 7 \times 7 \times 7=2401)$	1
$7^5 (=7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7=16807)$	7
$\vdots$	$\vdots$

100 은 4 로 나누어 떨어지므로 7^{100} 의 일의 자리의 수는 1 이다.

27. 자연수 x 를 소인수분해 했을 때 나타나는 소인수들의 합을 기호 $S(x)$ 로 나타내기로 할 때, 어떤 자연수 m 을 소인수분해하면 세 종류의 소인수가 나타나고, $S(m) = 12$ 라고 한다. 이 때, 이를 만족하는 m 의 값의 합을 구하여라.

(예를 들면, $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 이므로 $S(72) = 2 + 2 + 2 + 3 + 3 = 12$ 가 된다.) [배점 5, 중상]

> 102

해설

세 종류의 소수의 합이 12 이하인 경우는 (2, 3, 5), (2, 3, 7) 의 두 가지 경우이다.

$S(m) = 2+2+3+5$ 또는 $S(m) = 2+3+7$ 이므로
 $m = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$, $m = 2 \times 3 \times 7 = 42$
따라서 $60 + 42 = 102$ 이다.

28. $18 \times A \times 7^2$ 의 약수의 개수가 36 이라고 한다. 가장 작은 A 의 값을 a , 두 번째로 작은 A 의 값을 b 라고 할 때, $b - a$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

> 1

해설

$$2 \times 3^2 \times 7^2 \times A$$

약수의 개수가 36 개이므로

A 가 될 수 있는 수는 $2^2, 3^3, 7^3$ 이거나 2, 3, 7 이외의 소수이다.

따라서 가장 작은 값은 $2^2 = 4$,

두 번째로 작은 값은 5

$$\therefore 5 - 4 = 1$$

29. $2^a \times 3^b \times 11^c$ 이 132 를 약수로 가질 때, 세 자연수 a, b, c 의 최솟값의 합을 구하여라. [배점 5, 중상]

> 4

해설

132 를 소인수분해하면 $132 = 2^2 \times 3 \times 11$ 이다.

한편 $2^a \times 3^b \times 11^c$ 이 132 를 약수로 가지므로 a 는 2 보다 크거나 같고, b 는 1 보다 크거나 같다. 또한 c 도 1 보다 크거나 같다.

따라서 a, b, c 의 최솟값은 각각 2, 1, 1 이므로 구하는 합은 $2 + 1 + 1 = 4$ 이다.

30. $16 \times A$ 의 약수의 개수가 10 개일 때, A 의 값 중에서 가장 작은 수를 구하여라. [배점 5, 중상]

> 3

해설

16 을 소인수분해하면 $16 = 2^4$ 이다. $A = a^x$ 라고 하면 $16 \times A = 2^4 \times a^x$ 의 약수의 개수는 $(4+1) \times (x+1) = 10$ (개) 이므로 $x+1 = 2$, $x = 1$ 이다.

한편 $a = 2$ 이면 $16 \times A = 2^4 \times 2 = 2^5$ 이므로 약수의 개수는 $5+1 = 6$ (개) 로 조건을 만족하지 않는다.

따라서 $a \neq 2$ 인 가장 작은 소수이어야 하므로 $a = 3, x = 1$ 이다.

따라서 A 의 값은 3 이다.

31. 216 을 소인수분해하면 $2^a \times b^c$ 이다. 이때, $a + b + c$ 의 값은? [배점 5, 중상]

- ① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

해설

$$216 = 2^3 \times 3^3$$

따라서 $a = 3, b = 3, c = 3$

$$a + b + c = 9$$

32. $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10 = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7$ 이 된다. 이 때,
 $a + b + c$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

 14

해설

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10 \\ &= 1 \times 2 \times 3 \times (2 \times 2) \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times (2 \times 2 \times 2) \times \\ & \quad (3 \times 3) \times (2 \times 5) \\ &= 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 \text{ 이므로} \\ & a + b + c = 8 + 4 + 2 = 14 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

33. 자연수 a, b, c 에 대하여 $5 \times a = 7 \times b = c^2$ 을 만족하는
 c 의 값으로 가능하지 않은 것은? [배점 5, 중상]

- ① 35 ② 70 ③ 105
 ④ 140 ⑤ 180

해설

$5 \times a = 7 \times b = c^2$ 에서

i) $a = 5 \times 7^2$, $b = 5^2 \times 7$ 일 때, $5 \times (5 \times 7^2) = 7 \times (5^2 \times 7) = (5 \times 7)^2 = 35^2$

ii) $a = 2^2 \times 5 \times 7^2$, $b = 2^2 \times 5^2 \times 7$ 일 때,
 $5 \times (2^2 \times 5 \times 7^2) = 7 \times (2^2 \times 5^2 \times 7) = (2 \times 5 \times 7)^2 = 70^2$

iii) $a = 3^2 \times 5 \times 7^2$, $b = 3^2 \times 5^2 \times 7$ 일 때,
 $5 \times (3^2 \times 5 \times 7^2) = 7 \times (3^2 \times 5^2 \times 7) = (3 \times 5 \times 7)^2 = 105^2$

iv) $a = 4^2 \times 5 \times 7^2$, $b = 4^2 \times 5^2 \times 7$ 일 때,
 $5 \times (4^2 \times 5 \times 7^2) = 7 \times (4^2 \times 5^2 \times 7) = (4 \times 5 \times 7)^2 = 140^2$

따라서 c 의 값으로 가능한 것은 35, 70, 105, 140, ... 이다.

34. 자연수를 원소로 하는 집합 $A = \{x|x \text{는 } 2^2 \times 3^4 \times 5^3 \text{의 약수}\}$,
 $B = \{x|x \text{는 } 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \text{의 약수}\}$ 에 대하여
 $n(A \cup B)$ 를 구하여라. [배점 5, 상하]

 76

해설

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ A &= \{x|x \text{는 } 2^2 \times 3^4 \times 5^3 \text{의 약수}\} \text{ 이므로, } n(A) = 3 \times 5 \times 4 = 60, \\ B &= \{x|x \text{는 } 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \text{의 약수}\} \text{ 이므로, } n(B) = 4 \times 4 \times 2 \times 2 = 64, \\ A \cap B &= \{x|x \text{는 } 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 \text{의 약수}\} \text{ 이므로, } n(A \cap B) = 3 \times 4 \times 2 \times 2 = 48, \\ \therefore n(A \cup B) &= 60 + 64 - 48 = 76 \end{aligned}$$

35. 자연수 a, b, c 에 대하여 $120a = 270b = 150c$ 이 성립
 할 때, $a + b + c$ 의 최솟값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

 101

해설

$$\begin{aligned} 120a &= 2^3 \times 3 \times 5 \times a, \\ 270b &= 2 \times 3^3 \times 5 \times b, \\ 150c &= 2 \times 3 \times 5^2 \times c \text{ 이므로} \\ a, b, c \text{ 가 가장 작아지는 값은} \\ 120a &= 270b = 150c = 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \text{ 이다.} \\ \rightarrow a &= 45, b = 20, c = 36 \\ \therefore a + b + c &= 101 \end{aligned}$$