[pre-test]

방정식과 부등식

Test Length: 10 items
Test Time: 60 minutes March 22, 2011 Teacher Name: 홍순희 Student Name: 안정인

1. A, B, C, D 네 명이 서로 네 번씩 바둑을 두어 각 대국의 결과마다 승자에게 2점, 패자에게 0점, 무승부일 때는 두 명 모두에게 1점씩을 준다. 대국의 결과가 다음 표와 같을 때, D가 얻은 점수를 구하면?

	승	무	패	점수
A	6	1	5	13
B	5	3	4	13
C	8	2	2	18
D	?	?	?	x

[배점 5.0, 상하]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

D가 a승 b무 c패를 했다고 하면
$a+b+c=4\cdot 3=12$ ……㉠
네 명이 모두 승수와 패수가 같아야 하므로
$6+5+8+a=5+4+2+c$
$\therefore\ c=a+8$ ……㉡
또, 무승부의 합은 항상 짝수이므로 b는 짝수이어야 한다.
㉠, ㉡에서 $2a+b=4$이고
$b=0$일 때 $a=2$, $b=2$일 때 $a=1$,
$b=4$일 때 $a=0$이므로
어느 경우에나 D가 얻은 점수는 4점이다.

2. 세 실수 x, y, z가 $x+y+z=2, x^2+y^2+z^2=6, x^3+y^3+z^3=8$을 만족할 때, $-x-y+z$의 값은?(단, $x\le y\le z$) [배점 5.0, 상중]

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ 0

해설

$x+y+z=2$ …㉠
$x^2+y^2+z^2=6$ …㉡
$x^3+y^3+z^3=8$ …㉢
㉠, ㉡에서 $xy+yz+zx=-1$ …㉣
$x^3+y^3+z^3=$
$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz=8$
$\therefore xyz=-2$…㉤
㉠, ㉣, ㉤을 이용하여
x, y, z를 세 근으로 하는 삼차방정식을 만들면
$t^3-2t^2-t+2=0(t-2)(t+1)(t-1)=0$,
$t=-1,\ 1,\ 2$
$x\le y\le z$이므로 $x=-1$ $y=1$ $z=2$
$\therefore\ -x-y+z=2$

3. α는 이차방정식 $ax^2-2ax+b=0$의 근이고 β는 이차방정식 $bx^2-2ax+a=0$의 근이라고 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$의 값은? [배점 5.0, 상상]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

β 가 방정식 $bx^2-2ax+a=0$ 의 근이므로
$b\beta^2-2a\beta+a=0$ ·····㉠
$ax^2-2ax+b=0$에 $x=\frac{1}{\beta}$ 를 대입하면,
㉠에 의해서
$a\left(\frac{1}{\beta}\right)^2-2a\left(\frac{1}{\beta}\right)+b=\left(\frac{1}{\beta}\right)^2,(b\beta^2-2a\beta+a)=0$
따라서, $x=\frac{1}{\beta}$은 방정식 $ax^2-2ax+b=0$의 근이다.
그런데 α도 이 방정식 $ax^2-2ax+b=0$의 근이므로
방정식 $ax^2-2ax+b=0$의 두 근은 α와 $\frac{1}{\beta}$이다.
따라서, 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해서 $\alpha+\frac{1}{\beta}=2$

4. 삼차방정식 $(x-1)(x^2-ax+2a)=0$이 중근을 가질 때, 실수 a의 값의 집합은? [배점 4.5, 중상]

① $\{-1\}$ ② $\{0,8\}$
③ $\{-1,8\}$ ④ $\{-1,0,-8\}$
⑤ $\{-1,0,8\}$

해설

(i) $x=1$을 중근으로 가질 때
$x=1$을 $x^2-ax+2a=0$에 대입하면 $a=-1$
(ii) $x^2-ax+2a=0$이 중근을 가질 때
$D=a^2-8a=0$
$\therefore\ a=0$ 또는 8
(i), (ii)에 의하여 $\{-1,\ 0,\ 8\}$

5. 다음은 a,b,c,d,x,y,z,w가 실수일 때, 부등식 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)\geq(ax+by+cz+dw)^2$이 성립함을 증명하는 과정의 일부이다. ㉠, ㉡ 부분에 들어갈 기호가 순서대로 적당한 것은?

[증명] 모든 실수 t에 대하여 다음 부등식이 성립한다.
$(at-x)^2+(bt-y)^2+(ct-z)^2+(dt-w)^2$ ㉠ 0
이것을 t에 관하여 정리하면
$(a^2+b^2+c^2+d^2)t^2-2(ax+by+cz+dw)t$
$+(x^2+y^2+z^2+w^2)$ ㉠ 0
따라서 항상 성립하기 위해서는
$(ax+by+cz+dw)^2-$
$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)$ ㉡ 0·····(이하 생략)

[배점 4.5, 중상]

① $>,<$ ② $\geq,<$ ③ $\leq,>$
④ $\leq,\geq$ ⑤ $\geq,\leq$

해설

생략

6. 사차방정식 $x^4-x^3-4x^2-x+1=0$을 만족하는 실수 x에 대하여 $x+\frac{1}{x}=a$라 하자. 이 때, a가 될 수 있는 모든 값의 합은? [배점 4.5, 중상]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$의 양변을
x^2으로 나누면
$x^2 - x - 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$
$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$
$x + \frac{1}{x} = a$로 치환하면
$x^2 - a - 6 = 0$, $(a-3)(a+2) = 0$
$\therefore\ a = 3$ 또는 $a = -2$
따라서, 모든 A의 값의 합은 $3 + (-2) = 1$

7. 갑, 을, 병 세 사람의 200 m 달리기 기록의 평균은 53초이고, 갑과 병의 기록의 평균은 52초, 을과 병의 기록의 평균은 50초라고 할 때, 갑의 기록은?
[배점 4.0, 중중]

① 45초 ② 50초 ③ 52초
④ 55초 ⑤ 59초

해설

갑, 을, 병의 기록값을 a, b, c라 할 때
$\frac{a+b+c}{3} = 53$, $\frac{a+c}{2} = 52$, $\frac{b+c}{2} = 50$
$\begin{cases} a+b+c = 159 \\ a+c = 104 \\ b+c = 100 \end{cases}$
$\therefore\ a = 59$

8. a가 실수일 때, $f(x) = x^2 + 2(a+1)x + a^2$, $g(x) = x^2 + 2ax + (a-1)^2$에 대하여 x에 대한 두 이차방정식 $f(x) = 0, g(x) = 0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? [배점 4.0, 중중]

① $f(x) = 0$이 실근을 가지면 $g(x) = 0$도 실근을 가진다.
② $f(x) = 0$이 실근을 가지면 $g(x) = 0$은 허근을 가진다.
③ $f(x) = 0$이 허근을 가지면 $g(x) = 0$도 허근을 가진다.
④ $g(x) = 0$이 실근을 가지면 $f(x) = 0$은 허근을 가진다.
⑤ $g(x) = 0$이 허근을 가지면 $f(x) = 0$은 실근을 가진다.

해설

방정식 $f(x) = 0$과 $g(x) = 0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면
$\frac{D_1}{4} = (a+1)^2 - a^2 = 2a + 1$,
$\frac{D_2}{4} = a^2 - (a-1)^2 = 2a - 1$
모든 실수 a에 대하여
$2a + 1 > 2a - 1$,
즉, $D_1 > D_2$이므로 $D_1 < 0$이면 $D_2 < 0$

9. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=6 \\ z+x=7 \end{cases}$ 을 풀면?

[배점 3.5, 하상]

① $x=2, y=3, z=4$

② $x=2, y=3, z=-4$

③ $x=2, y=3, z=5$

④ $x=2, y=-3, z=4$

⑤ $x=3, y=2, z=4$

해설

주어진 식을 모두 더하면

$2(x+y+z)=18,\ x+y+z=9 \quad \cdots ①$

다시 주어진 식에 ①을 각각 대입한다.

$\Rightarrow \quad x=3, \quad y=2, \quad z=4$

10. $\{x|x^2-2ax+2a+3<3\}=\varnothing$을 만족하는 정수 a의 개수는?

[배점 3.5, 하상]

① 1개 ② 3개 ③ 5개

④ 7개 ⑤ 9개

해설

$x^2-2ax+2a+3<0$의 해가 존재하지 않으려면

모든 실수 x에 대하여

$x^2-2ax+2a+3\geq 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2-(2a+3)\leq 0,\ (a-3)(a+1)\leq 0$

$\therefore -1\leq a\leq 3$

따라서, 구하는 정수 a의 개수는

$-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 5개이다.