[pre-test]

Test Length: 33 items
Test Time: 60 minutes

이차방정식-이차함수의 최댓값과 최솟값

December 14, 2010 Teacher Name: 홍순희 Student Name: 안정인

1. 이차방정식 $2x^2 + px + q = 0$ 의 해집합이 $\left\{\frac{5+\sqrt{3}}{2}, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right\}$ 일 때, $\{p+q,\ 2p+q\}$를 해집합으로 하고 x^2 의 계수가 1 인 이차방정식은?

[배점 4.5, 중상]

① $x^2 - 8x - 9 = 0$ ② $x^2 + 8x - 9 = 0$

③ $x^2 + 8x + 9 = 0$ ④ $x^2 + x - 9 = 0$

⑤ $x^2 + x + 9 = 0$

해설

$\frac{5+\sqrt{3}}{2} + \frac{5-\sqrt{3}}{2} = 5 = -\frac{p}{2}$

$\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{11}{2} = \frac{q}{2}$

$\therefore\ p = -10,\ q = 11$

따라서 $p+q = 1,\ 2p+q = -9$ 이므로 1 과 -9 를 근으로 하고 x^2 의 계수가 1 인 이차방정식은

$(x-1)(x+9) = 0$

$\therefore\ x^2 + 8x - 9 = 0$

2. $x = -3$ 일 때 최댓값 4 를 갖고, y 절편이 2 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y = a(x-p)^2 + q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

[배점 4.5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{16}{27}$

해설

$y = a(x+3)^2 + 4$

$= a(x^2 + 6x + 9) + 4$

$= ax^2 + 6ax + 9a + 4$

$= 9a + 4 = 2$

$9a = -2$

$a = -\frac{2}{9}$

$y = -\frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 2$

$apq = (-\frac{2}{9}) \times (-\frac{4}{3}) \times 2 = \frac{16}{27}$

3. 1 에서 n 까지의 자연수의 합은 $\frac{n(n+1)}{2}$ 이다. 합이 78 이 되려면 1 에서 얼마까지 더하면 되는지 구하여라.

[배점 4.5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$\frac{n(n+1)}{2} = 78$, $n(n+1) = 156$,

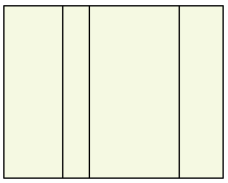
$n^2 + n - 156 = 0$,

$(n+13)(n-12) = 0$,

$n = -13$ 또는 $n = 12$,

따라서 n 은 자연수이므로 $n = 12$ 이다.

4. 어떤 농부가 길이 700m 의 철망을 가지고 그림과 같은 모양의 가축우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이를 최대로 하는 바깥 직사각형의 가로, 세로의 길이 중 짧은 것은 몇 m 인가?



[배점 4.5, 중상]

① 60m ② 70m ③ 80m

④ 90m ⑤ 100m

해설

세로의 길이를 x 라 하면 세로가 5 개 있으므로 필요한 길이는 $5x$,

가로의 길이는 $\frac{1}{2}(700-5x)$ 이다. 전체 넓이를 S 라 하면

$$S=\frac{1}{2}(700-5x)\cdot x$$
$$=-\frac{5}{2}x^2+350x$$
$$=-\frac{5}{2}(x^2-140x+70^2-70^2)$$
$$=-\frac{5}{2}(x-70)^2+12250$$

따라서 넓이는 세로가 70m , 가로가 175m 일 때 최대이다.

5. 이차함수 $y=-\frac{1}{3}(x-1)^2+10$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동하였더니 $y=-\frac{1}{3}(x+4)^2-2$ 와 포개어졌다. pq 의 값을 구하여라. [배점 4.0, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 60

해설

$$y=-\frac{1}{3}(x-1-p)^2+10+q$$
$$=-\frac{1}{3}(x+4)^2-2$$

$-1-p=4,\ p=-5$

$10+q=-2,\ q=-12$

$\therefore\ pq=60$

6. 다음 중 이차함수 $y=-\frac{3}{4}x^2$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?(정답 2 개)

[배점 4.0, 중하]

① $(2,\ -3)$ 을 지난다.

② 축의 방정식은 $y=0$ 이다.

③ 치역은 $\{y|y\le 0\}$ 이다.

④ 제 3, 4 사분면을 지난다.

⑤ x 의 값이 증가할 때, y 값도 증가한다.

해설

① $(2,\ -3)$ 을 대입하면 식을 만족하므로 지난다.

② 축은 $x=0$ 이므로 옳지 않다.

③ 위로 볼록하고 꼭짓점이 원점이므로 $y\le 0$

④ 위로 볼록, 꼭짓점이 원점인 그래프를 그리면 제 3, 4 분면을 지난다.

⑤ x 값이 증가할 때 y 값은 감소한다.

7. 다음 중 x 에 관한 이차방정식인 것은? [배점 4.0, 중중]

① $2x^2+1=(2x-1)(x+3)$

② $(x-1)(x+1)=(x+1)^2$

③ $-3(x^2+x)=2x-3x^2+1$

④ $x^2+1=(x-1)(2-x)$

⑤ $x(x^2-5)=(x+1)(x+2)$

해설

① 정리하면 $5x-4=0$: 일차방정식
② 정리하면 $x+1=0$: 일차방정식
③ 정리하면 $5x+1=0$: 일차방정식
④ 정리하면 $2x^2-3x+3=0$: 이차방정식
⑤ 정리하면 $x^3-x^2-8x-2=0$: 삼차방정식

8. 연속하는 세 자연수가 있다. 가장 큰 수의 제곱이 다른 두 수의 제곱의 합보다 3만큼 더 작을 때, 이 세 자연수의 합을 구하여라. [배점 4.0, 중하]

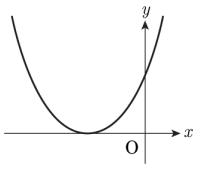
▶ 답:

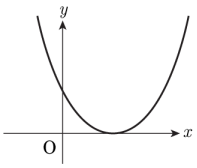
▷ 정답: 9

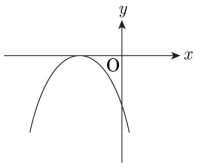
해설

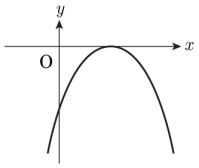
연속하는 세 자연수를 $x-1,\ x,\ x+1$ 이라 하면
$(x+1)^2=(x-1)^2+x^2+3$
$x^2-4x+3=0$
$(x-3)(x-1)=0$
$x-1, x, x+1$은 자연수이므로 $x=3$
$\therefore\ 2+3+4=9$

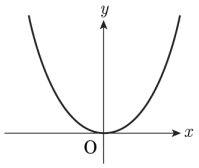
9. 일차함수 $y=ax+b(a\neq 0,\ b\neq 0)$ 의 그래프가 제4사분면을 지나지 않을 때, 이차함수 $y=a(x-b)^2$ 의 그래프는? [배점 4.0, 중중]

①


②


③


④


⑤


해설

$y=ax+b$ 의 그래프가 제 4 사분면을 지나지 않으므로$a>0,\ b>0$ 이다.
$y=a(x-b)^2$ 의 그래프는 아래로 볼록한 모양이고, 꼭짓점은 y 축의 오른쪽에 있다.

10. 이차함수 $y = x^2 + 2bx + c$ 가 $x = 1$ 에서 최솟값 3 을 가질 때, $b + c$ 의 값을 구하면? [배점 4.0, 중중]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x = 1$ 일 때, 최솟값 3 을 가지므로 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 3)$ 이다.

$y = x^2 + 2bx + c$

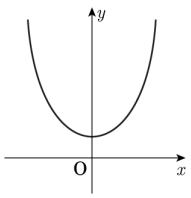
$= (x-1)^2 + 3$

$= x^2 - 2x + 4$

$\therefore b = -1,\ c = 4$

$\therefore b + c = 3$

11. 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 항상 옳은 것을 보기에서 모두 골라라.



보기

㉠ $a < 0$ ㉡ $q > 0$

㉢ $a + q < 0$ ㉣ $aq > 0$

㉤ $a - q > 0$

[배점 4.0, 중중]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉡

▷ 정답: ㉣

해설

그래프가 아래로 볼록하므로 $a > 0$, 꼭짓점의 좌표가 $(0, q)$, $p = 0,\ q > 0$

따라서 $a > 0$, $q > 0$ 이다.

㉠ $a > 0$

㉡ $a + q > 0$

㉢ 알 수 없다.

12. 다음 빈칸을 알맞게 채우고, 꼭짓점의 좌표와 대칭축의 방정식을 구하면?.

이차함수 $y = (x-2)^2 - 3$ 의 그래프는 $y =$ □ 의 그래프를 x 축 방향으로 □만큼, y 축 방향으로 □ 만큼 평행이동한 그래프이다.

[배점 3.5, 하상]

① x^2, 2, -3, 꼭짓점 $(2,\ -3)$, 대칭축 $x = 2$

② x^2, -2, -3, 꼭짓점 $(-2,\ -3)$, 대칭축 $x = -2$

③ x^2, 2, 3, 꼭짓점 $(2,\ 3)$, 대칭축 $x = 2$

④ x^2, 2, -3, 꼭짓점 $(2,\ -3)$, 대칭축 $y = 2$

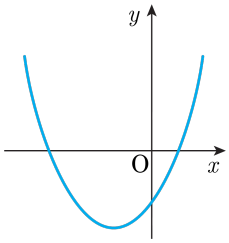
⑤ x^2, 2, -3, 꼭짓점 $(-2,\ -3)$, 대칭축 $y = 2$

해설

$y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프는 $y = ax^2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 p 만큼, y 축 방향으로 q 만큼 평행이동한 그래프이다.

꼭짓점 : $(p,\ q)$, 축의 방정식 : $x = p$

13. 이차함수 $y = a(x+p)^2 + q$ 의 그래프에서 다음 □ 안에 알맞은 부등호를 써 넣어라.



$a + p - q$ □ 0

[배점 3.5, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: >

해설

이차함수 $y = a(x+p)^2 + q$ 의 꼭짓점은 $(-p,\ q)$ 이다.
그래프가 아래로 볼록하므로 $a > 0$ 이다.
또한, 꼭짓점 $(-p,\ q)$ 가 제3 사분면에 있으므로
$-p < 0,\ p > 0,\ q < 0$ 이다.
따라서 $a + p - q > 0$ 이다.

14. $y = -2x^2$ 을 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동 했더니 $(2,\ a)$ 를 지난다고 한다. a 의 값을 구하면? [배점 3.5, 하상]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = -2x^2 \Rightarrow y = -2(x-3)^2 + 1$
$a = -2(2-3)^2 + 1 = -1$

15. 이차함수 $y = 5x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동시키면 점 $(1,\ a)$ 를 지난다. 이때, a 의 값을 구하여라. [배점 3.5, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: 20

해설

$y = 5(x+1)^2$ 의 그래프가
점 $(1,\ a)$ 를 지나므로
$a = 5(1+1)^2$, $a = 20$ 이다.

16. 두 집합 $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 9 = 0\}$ 에서 집합 $A \cap B$ 의 원소는? [배점 3.5, 하상]

① -3 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 9

해설

$x^2 - 5x + 6 = 0$
$(x-3)(x-2) = 0$
$\therefore x = 2, 3$
$x^2 - 9 = (x-3)(x+3) = 0$
$\therefore x = \pm 3$
따라서, 공통인 해는 $x = 3$ 이다.

17. 다음 방정식 $(x+4)^2 = 5x+7$ 을 $ax^2+bx+c=0$ 의 꼴로 나타낼 때, $a-b+c$ 의 값을 구하면? (단, $a>0$) [배점 3.5, 하상]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$(x+4)^2 = 5x+7$

$x^2+8x+16-5x-7=0$

$\therefore x^2+3x+9=0$

$a=1,\ b=3,\ c=9$

$\therefore\ a-b+c=1-3+9=7$

18. 이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하였더니 점 $(2,\ 14)$ 를 지났다. a 의 값을 구하여라. [배점 3.5, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$y=ax^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 식은 $y=ax^2-2$ 이고, 점 $(2,\ 14)$ 를 지나므로 $14=a^2-2$ 이다.

$\therefore a=4$

19. 다음 중 그 그래프가 위로 볼록하고, 폭이 가장 넓은 이차함수는? [배점 3.5, 하상]

① $y=x^2$ ② $y=-\frac{4}{3}x^2$

③ $y=\frac{1}{2}x^2$ ④ $y=-2x^2$

⑤ $y=-\frac{1}{4}x^2$

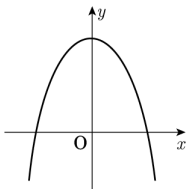
해설

$y=ax^2$ 의 그래프는 아래로 볼록하면 $a>0$, 위로 볼록하면 $a<0$

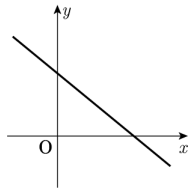
$|a|$ 이 작을수록 포물선의 폭이 넓다.

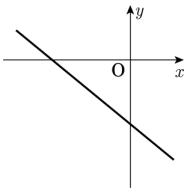
따라서 x^2 의 계수가 음수 이면서 절댓값이 가장 작은 것은 ⑤이다.

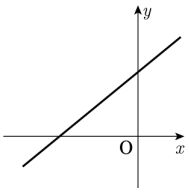
20. 이차함수 $y = ax^2 + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프는?

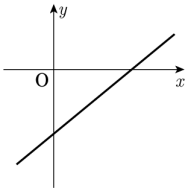


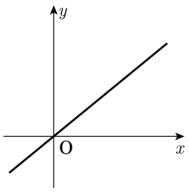
[배점 3.5, 하상]

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

이차함수 $y = ax^2 + b$ 가 위로 볼록이므로 $a < 0$ 이고, 꼭짓점이 y 절편이 양수이므로 $b > 0$ 이다. 따라서 $y = ax + b$ 의 그래프는 기울기가 음수이고 y 절편이 양수인 그래프이다.

21. 이차방정식 $3x^2 - (k-2)x + m = 0$ 의 두 근의 곱이 1 , 합이 -2 일 때, 실수 k , m 에 대하여 km 의 값은?

[배점 3.5, 하상]

① 6 ② 12 ③ -6

④ -12 ⑤ 3

해설

두 근의 곱 : $1 = \dfrac{m}{3}$ $m = 3$

두 근의 합 : $-2 = \dfrac{k-2}{3}$ $k = -4$

$\therefore km = (-4) \times 3 = -12$

22. 이차방정식 $x^2 + (m+1)x + 20 = 0$ 의 한 근이 다른 근 보다 1클 때, 이것을 만족하는 m의 값들의 합을 구하면? [배점 3.5, 하상]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ -1 ⑤ -2

해설

한 근을 a, 다른 한 근은 $a+1$ 이라 하면
근과 계수와의 관계에 의해
두 근의 합 $a+(a+1)=-(m+1)$ …①
두 근의 곱 $a(a+1)=20$ …②
②를 풀면 $a=4,\ -5$
$a=4,\ -5$ 를 각각 ①에 대입하면
$a=4$ 일 때, $m=-10$
$a=-5$ 일 때, $m=8$
$\therefore (-10)+8=-2$

23. 다음 이차함수의 그래프에서 포물선의 폭이 가장 넓은 것부터 순서대로 나열한 것은?

가. $y=-\frac{1}{3}x^2$
나. $y=\frac{1}{2}(x-3)^2$
다. $y=-2x^2+x-3$
라. $y=(x-1)^2+1$

[배점 3.5, 하상]

① 다, 라, 나, 가 ② 가, 라, 나, 다
③ 다, 나, 가, 라 ④ 가, 나, 라, 다
⑤ 가, 나, 다, 라

해설

x^2 의 계수의 절댓값이 작을수록 폭이 넓다.
따라서 폭이 넓은 순으로 나열하면 ④ 가, 나, 라, 다 이다.

24. 다음 등식 중에 x 에 관한 이차방정식은?

[배점 3.0, 하하]

① $2x^2+4=2(x^2-x)$
② $x^2-4=x(x-1)$
③ $x^3-x^2-4=x(x^2-1)$
④ $3x^2-1=(x+2)(3x-1)$
⑤ $-4x(x+1)=-4x^2$

해설

① $2x^2+4=2(x^2-x)$ $2x^2+4=2x^2-2x$,$2x+4=0$ 이므로 일차방정식이다.
② $x^2-4=x(x-1)$ $x^2-4=x^2-x$, $x-4=0$ 이므로 일차방정식이다.
③ $x^3-x^2-4=x(x^2-1)$, $x^3-x^2-4=x^3-x$ 이므로 이차방정식이다.
④ $3x^2-1=(x+2)(3x-1)$,$5x-1=0$ 이므로 일차방정식이다.
⑤ $-4x(x-1)=-4x^2$ $-4x^2+4x=-4x^2$, $4x=0$ 이므로 일차방정식이다.

해설

25. 다음 중 이차함수인 것은? (정답 2 개)

[배점 3.0, 하중]

① $y=x(x-3)+1$ ② $y=-x^3+3x$
③ $y=2x+1$ ④ $y=\frac{1}{x^2}$
⑤ $y=1-2x^2$

해설

$y=-x^3+3x$ 는 삼차함수, $y=2x+1$ 는 일차함수, $y=\frac{1}{x^2}$ 는 분수함수이다.

26. 평행이동에 의하여 포물선 $y=-\frac{1}{3}x^2+1$ 의 그래프와 완전히 포개어지는 것은? [배점 3.0, 하중]

① $y=\frac{1}{3}x^2+1$

② $y=-3x^2-2x+1$

③ $y=3x^2+1$

④ $y=x^2+1$

⑤ $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+4$

해설

완전히 포개어지려면 x^2 의 계수가 같아야 한다.

27. $x^2+6x-5=0$ 을 $(x+A)^2=B$ 의 꼴로 나타낼 때, $A+B$ 의 값을 구하여라. [배점 3.0, 하하]

▶ 답:

▷ 정답: 17

해설

$x^2+6x-5=0,\ x^2+6x=5$

$(x+3)^2=5+9,\quad (x+3)^2=14$

$A=3,\ B=14$

$\therefore\ A+B=17$

28. 다음 포물선을 폭이 넓은 것부터 차례로 쓴 것으로 옳은 것은?

(가) $y=-x^2$
(나) $y=\frac{1}{2}x^2+4$
(다) $y=2(x-1)^2$
(라) $y=-\frac{3}{4}x^2$
(마) $y=3(x+2)^2-1$

[배점 3.0, 하하]

① (라)-(나)-(가)-(다)-(마)

② (나)-(라)-(다)-(마)-(가)

③ (마)-(다)-(가)-(라)-(나)

④ (라)-(나)-(마)-(다)-(가)

⑤ (나)-(라)-(가)-(다)-(마)

해설

$y=kx^2+c$ (c 는 상수)에서 포물선의 폭은 k 의 절댓값의 크기가 클수록 좁아진다.

29. 함수 $f(x) = x^2 + 3x - 5$ 에 대하여 $f(1) + f(2)$ 의 값을 구하여라. [배점 3.0, 하하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$f(x) = x^2 + 3x - 5$ 에서
$f(1) = 1 + 3 - 5 = -1$
$f(2) = 4 + 6 - 5 = 5$
$\therefore\ f(1) + f(2) = -1 + 5 = 4$

30. 이차방정식 $5x^2 - 2x - 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta - \alpha\beta$ 의 값으로 알맞은 것을 고르면? [배점 3.0, 하하]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\alpha + \beta = \frac{2}{5}, \alpha\beta = -\frac{3}{5}$ 이므로
$(\text{준식}) = \frac{2}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right) = 1$

31. y 는 x 의 제곱에 비례하고 $x = 2$ 일 때 $y = 12$ 이다. x 의 값이 1 에서 4 까지 3 만큼 증가할 때, y 의 값의 증가량을 구하면? [배점 3.0, 하중]

① 42 ② 43 ③ 44 ④ 45 ⑤ 46

해설

$y = ax^2$, $f(2) = 12$ 이므로
$12 = a \times 2^2$, $a = 3$
$y = 3x^2$
$f(1) = 3 \times 1^2 = 3$
$f(4) = 3 \times 4^2 = 48$
$\therefore 48 - 3 = 45$

32. 다음 □ 에 알맞은 말을 써 넣어라.
이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프와 같은 모양의 곡선을 □ 이라고 한다. 이 그래프는 선대칭도형으로 그 대칭축을 포물선의 □ 이라 하고, 그래프와 축과의 교점을 □ 이라고 한다. [배점 3.0, 하중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 포물선

▷ 정답 : 축

▷ 정답 : 절편

해설

이차함수는 포물선이고 축을 기준으로 대칭이다.

33. 이차방정식 $(x-1)(x-5)=4$ 를 $(x+p)^2=q$ 의 꼴로 나타내려고 한다. 이 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.

[배점 3.0, 하하]

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$(x-1)(x-5)=4$, $x^2-6x=-1$,

$(x-3)^2=8$, $p=-3$, $q=8$,

$\therefore\ p+q=-3+8=5$