

평면도형의 성질-입체도형의 성질

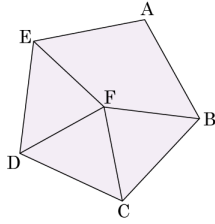


November 26, 2010

Teacher Name: 홍순희

Student Name: 안정인

1. 다음 그림에서 삼각형 EFD는 정삼각형이고 오각형 ABCDE는 정오각형이다. $\angle BFC$ 의 크기를 구하여라.



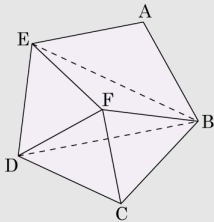
[배점 5.0, 상중]

▶ 답: .

▶ 정답: 84°

해설

BE와 BD를 그으면



$\triangle BEF$ 와 $\triangle BFD$ 에서 $\overline{BE} = \overline{BD}$, $\overline{BF}$ 는 공통,
 $\overline{EF} = \overline{FD}$ 이므로 $\triangle BEF \cong \triangle BFD$ (SSS 합동)

$\therefore \angle EBF = \angle FBD, \angle BEF = \angle BDF$

도형 BEFD에서

$\angle EFD = \angle EBD + \angle BEF + \angle BDF = (\angle EBF + \angle FBD) + (\angle BEF + \angle BDF) = 2(\angle FBD + \angle BDF) = 60^\circ$

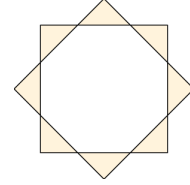
$\therefore \angle FBD + \angle BDF = 30^\circ, \angle BFD = \angle BFE = 150^\circ$

정오각형의 한 내각의 크기는 108° 이므로
 $\angle FDC = 108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$

$\triangle FDC$ 에서 $\overline{FD} = \overline{DC}$ 이므로 $\angle DFC = (180^\circ - 48^\circ) \div 2 = 66^\circ$

$\therefore \angle BFC = \angle BFD - \angle DFC = 150^\circ - 66^\circ = 84^\circ$

2. 다음 그림은 색칠한 부분의 삼각형의 크기와 모양이 모두 같도록 정사각형 두 개를 겹쳐놓은 것이다. 이와 같은 방법으로 겹칠 때 내부에 생기는 다각형의 내각의 합이 2520° 이 되는 정 n 각형을 구하여라.



[배점 5.0, 상중]

▶ 답:

▶ 정답: 정팔각형

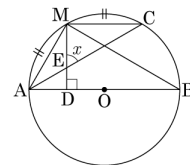
해설

정 n 각형을 겹치면 내부에 정 $2n$ 각형이 만들어지고,

정 $2n$ 각형의 내각의 합이 $180^\circ \times (2n - 2) = 2520^\circ$ 이 되는 $n = 8$ 이다.

따라서 구하고자 하는 다각형은 정팔각형이다.

3. $\overline{AB}$ 는 원 O의 지름, M은 호 AC의 중점이고, $\overline{MD} \perp \overline{AB}$, 호 AC가 원주의 $\frac{1}{3}$ 일 때, $2\angle MEC$ 의 크기는?



[배점 5.0, 상중]

① 30° ② 60° ③ 90° ④ 120° ⑤ 150°



해설

호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로 호 AC
의 중심각 $\angle AOC = \frac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ$

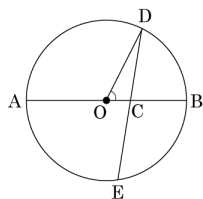
$\overline{AO} = \overline{CO}$ (반지름) 이므로 $\triangle AOC$ 는 이등변삼
각형이다.

$$\angle OAC = \frac{1}{2}(180 - 120) = 30^\circ \text{ 이므로}$$

$$\therefore x = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$$

$$\therefore 2x = 120^\circ$$

4. 다음 그림에서 $\overline{AB}$ 는 원 O 의 지름으로 $\angle DOC = 3\angle ODC$ 이다. $\widehat{AE}$ 가 원 O 의 원주의 $\frac{1}{3}$ 일 때, $\angle BOD$ 의 크기를 구하여라.



[배점 5.0, 상하]

▶ 답: $^\circ$

▶ 정답: 72°

해설

$$\angle AOE = 360^\circ \times \frac{1}{3} = 120^\circ \text{ 이므로}$$

$$\angle COE = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\angle ODC = a \text{ 라 하면 } \angle DOC = 3a, \angle DEO = a$$

$\triangle ODE$ 에서

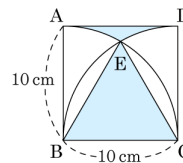
$$3a + 60^\circ + a + a = 180^\circ$$

$$5a = 120^\circ$$

$$a = 24^\circ$$

$$\therefore \angle BOD = 3a = 72^\circ$$

5. 다음 정사각형 ABCD 에서 색칠한 부분의 넓이를 구
하여라.



[배점 5.0, 상하]

▶ 답: cm^2

▶ 정답: $100 - \frac{50}{3}\pi \text{ cm}^2$

해설

$$\overline{EB} = \overline{BC} = \overline{EC} \text{ 이므로}$$

$\triangle EBC$ 는 정삼각형이다.

$$\angle ABE = \angle DCE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

따라서 색칠한 부분의 넓이는 $10 \times 10 - \pi \times 10^2 \times \frac{30^\circ}{360^\circ} \times 2 = 100 - \frac{50}{3}\pi (\text{cm}^2)$ 이다.

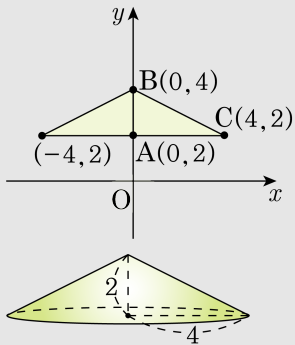
6. 좌표평면 위에서 점 A(0, 2), B(0, 4), C(4, 2) 로 이
루어진 삼각형을 y 축을 중심으로 회전시켰을 때의 부
피를 구하여라. [배점 5.0, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: $\frac{32}{3}\pi$



해설



위의 그림과 같은 입체도형이 만들어지므로

$$V = \frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times \pi \times 2 = \frac{32}{3}\pi$$

7. 두 다각형 P, Q의 한 꼭짓점에서 그을 수 있는 대각선의 비가 1 : 2 일 때 두 다각형의 내각의 합을 모두 더하면 1440° 이다. 두 다각형의 변의 개수의 합을 구하여라. [배점 5.0, 상상]

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12 개

해설

각각 n 각형, m 각형이라 하면

$$(n - 3) : (m - 3) = 1 : 2$$

$$m - 3 = 2n - 6$$

$$m = 2n - 3 \dots \textcircled{1}$$

$$180^\circ \times (n - 2) + 180^\circ (m - 2) = 1440^\circ$$

$$n - 2 + m - 2 = 8 \dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$n - 2 + 2n - 3 - 2 = 8$$

$$3n = 15$$

$$n = 5, m = 7$$

∴ 12 개

8. 한 외각의 크기를 한 내각의 크기로 나누었을 때, 자연수가 되는 정다각형을 모두 구하여라.

[배점 5.0, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

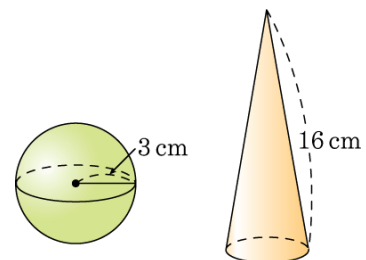
▷ 정답 : 정사각형

해설

$$\frac{360^\circ}{n} \div \frac{180^\circ \times (n - 2)}{n} = \frac{2}{n - 2}$$

$\frac{2}{n - 2}$ 가 자연수가 되는 경우는 $n = 3$ 또는 $n = 4$ 인 경우이다.

9. 다음 두 입체도형의 겉넓이가 같을 때, 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 구하여라.



[배점 4.5, 중상]

▶ 답 :

cm

▷ 정답 : 2 cm



해설

$$(\text{구의 겉넓이}) = 4\pi \times 3^2 = 36\pi \text{ cm}^2$$

$$\pi \times r^2 + \pi \times r \times 16 = 36\pi$$

$$r^2 + 16r = 36$$

$r = 2$ 일 때, $2^2 + 16 \times 2 = 36$ 이므로 $r = 2 \text{ cm}$ 이다.

10. 어느 다각형의 한 꼭짓점에서 대각선을 그었더니 21개의 삼각형이 생겼다. 이 다각형의 대각선은 모두 몇 개 인가? [배점 4.5, 중상]

- ① 170개 ② 189개 ③ 209개
 ④ 230개 ⑤ 252개

해설

n 각형의 한 꼭짓점에서 대각선을 그었을 때 생기는 삼각형은 $(n-2)$ 개이므로

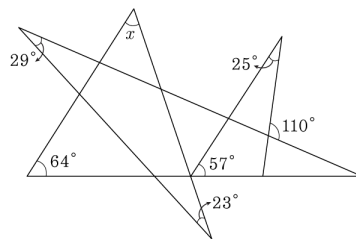
$$n - 2 = 21$$

$$\therefore n = 23$$

n 각형의 대각선 총 개수는 $\frac{n(n-3)}{2}$ 개이므로

$$\therefore \frac{23(23-3)}{2} = \frac{23 \times 20}{2} = 230$$

11. 다음 그림에서 $\angle x$ 의 크기를 구하여라.

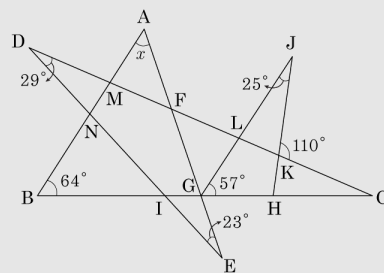


[배점 4.5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 36°

해설



$$\angle KHC = 25^\circ + 57^\circ = 82^\circ$$

$$\angle FCG = 110^\circ - \angle KHC = 110^\circ - 82^\circ = 28^\circ$$

$$\angle AFD = 29^\circ + 23^\circ = 52^\circ$$

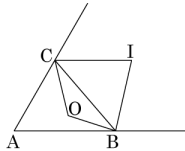
$$\angle AMF = 64^\circ + 28^\circ = 92^\circ$$

$$\angle x = 180^\circ - (\angle AFD + \angle AMF) = 180^\circ - (52^\circ + 92^\circ)$$

$$\therefore \angle x = 36^\circ$$



12. 다음 그림에서 삼각형 ABC의 $\angle B$ 와 $\angle C$ 의 이등분선의 교점을 O, $\angle B$ 의 외각과 $\angle C$ 의 외각의 이등분선의 교점을 I라고 정한다. $\angle A = \angle x$, $\angle BIC = \angle y$, $\angle BOC = \angle z$ 라 할 때, $\angle y + \angle z$ 의 크기를 구하여라.



[배점 4.5, 중상]

▶ 답: 180°

▶ 정답: 180°

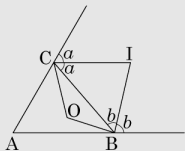
해설

그림과 같이 $\angle B$ 와 $\angle C$ 의 외각의 이등분선에 의해 나누어진 각을 각각 $\angle a$, $\angle b$ 라 하면

$$\angle y + \angle a + \angle b = 180^\circ, \quad \angle a + \angle b = 180^\circ - \angle y$$

삼각형의 세 외각의 크기의 합은 360° 이므로

$$2\angle a + 2\angle b + (180^\circ - \angle x) = 360^\circ, \quad \angle y = \frac{180^\circ - \angle x}{2} \dots \textcircled{1}$$

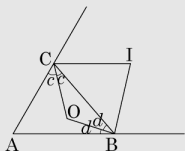


그림과 같이 $\angle B$ 와 $\angle C$ 의 내각의 이등분선에 의해 나누어진 각을 각각 $\angle c$, $\angle d$ 라 하면

$$\angle z + \angle c + \angle d = 180^\circ, \quad \angle c + \angle d = 180^\circ - \angle z$$

$\triangle ABC$ 의 세 내각의 크기의 합은 180° 이므로

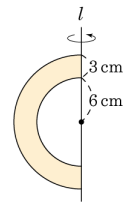
$$\angle x + 2\angle c + 2\angle d = 180^\circ, \quad \angle z = \frac{180^\circ + \angle x}{2} \dots \textcircled{2}$$



①, ②에 의하면

$$\angle y + \angle z = \frac{180^\circ - \angle x}{2} + \frac{180^\circ + \angle x}{2} = 180^\circ$$

13. 다음 그림의 색칠한 부분을 직선 l 을 축으로 하여 1 회전시켰을 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.



[배점 4.5, 중상]

▶ 답: cm^3

▶ 정답: $684\pi \text{ cm}^3$

해설

V_1 : 큰 구의 부피

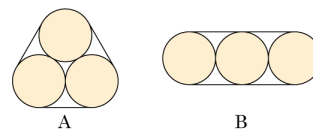
V_2 : 작은 구의 부피

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi \times 9^3 = 972\pi$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \times 6^3 = 288\pi$$

$$V = V_1 - V_2 = 972\pi - 288\pi = 684\pi(\text{cm}^3)$$

14. 반지름의 길이가 3cm인 원기둥 3개를 A, B 두 가지 방법으로 묶으려고 한다. 끈의 길이를 최소로 하려고 할 때, 길이가 긴 끈과 짧은 끈의 차는?



[배점 4.5, 중상]

① 3cm ② 4cm ③ 5cm

④ 6cm ⑤ 10cm



해설

A의 경우, 곡선의 길이는 반지름이 3cm인 원의 둘레이므로, $2\pi \times 3 = 6\pi$ (cm)

직선의 길이는 $3 \times 2 \times 3 = 18$ (cm)

따라서 필요한 끈의 길이는 $(6\pi + 18)$ cm이다.

B의 경우, 곡선의 길이는 반지름이 3cm인 원의 둘레이므로, $2\pi \times 3 = 6\pi$ (cm)

직선의 길이는 $3 \times 4 \times 2 = 24$ (cm)

따라서 필요한 끈의 길이는 $(6\pi + 24)$ cm이다.

따라서 긴 끈은 B의 경우이고 짧은 끈은 A의 경우이므로 차는 $(6\pi + 24) - (6\pi + 18) = 6$ (cm)이다.

15. 다음과 같이 순철이는 민기, 예진이와 피자를 시켜먹었다. 피자의 한 판을 넓이의 비가 7:3:5인 부채꼴 모양으로 나누어 순철, 민기, 예진이가 차례대로 먹었다. 이때 순철이가 먹은 피자 조각의 중심각의 크기를 구하여라. [배점 4.5, 중상]

▶ 답: .

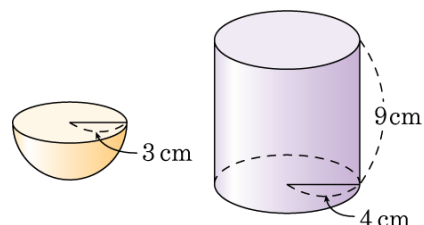
▶ 정답: 168°

해설

순철이가 먹은 피자 조각의 중심각의 크기는

$$360^\circ \times \frac{7}{7+3+5} = 360^\circ \times \frac{7}{15} = 168^\circ$$

16. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 3cm인 반구 모양의 그릇으로 물을 담아 원기둥 모양의 용기를 가득 채우려고 한다. 물을 몇 번 담아 부어야 용기가 가득 차겠는지 구하여라.



[배점 4.5, 중상]

▶ 답: 번

▶ 정답: 8번

해설

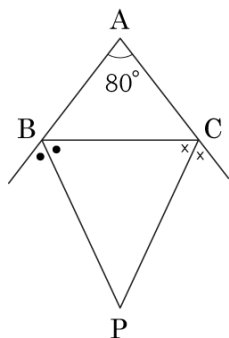
$$(\text{반구의 부피}) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 18\pi(\text{cm}^3)$$

$$(\text{원기둥의 부피}) = \pi \times 4^2 \times 9 = 144\pi(\text{cm}^3)$$

$$\therefore 144\pi \div 18\pi = 8(\text{번})$$



17. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{BP}$ 는 $\angle B$ 의 외각의 이등분선이고, $\overline{CP}$ 는 $\angle C$ 의 외각의 이등분선일 때, $\angle BPC$ 의 크기를 구하면?



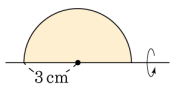
[배점 4.5, 중상]

- ① 50° ② 52° ③ 54°
 ④ 56° ⑤ 58°

해설

$\angle CBP = a$, $\angle BCP = b$ 라 하면
 외각의 합은 360° 이므로
 $2a + 2b + 100^\circ = 360^\circ$
 $\therefore a + b = 130^\circ$
 $\therefore \angle BPC = 180^\circ - (a + b) = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

18. 다음 그림과 같이 반원을 직선을 회전축으로 하여 1회전 시켰을 때 생기는 회전체의 부피가 $a\pi\text{cm}^3$ 이고, 겉넓이가 $b\pi\text{cm}^2$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.



[배점 4.5, 중상]

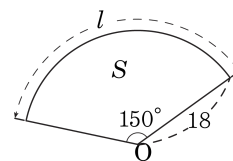
▶ 답 :

▶ 정답 : 72

해설

1 회전 시켜서 얻은 회전체는 반지름이 3cm 인 구이고,
 구의 부피는 $\frac{4}{3}\pi r^3$ 이므로 $\frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = 36\pi(\text{cm}^3)$ 이고,
 구의 겉넓이는 $4\pi r^2$ 이므로 $4 \times \pi \times 3^2 = 36\pi(\text{cm}^2)$ 이다.
 따라서 $a + b$ 의 값은 72 이다.

19. 다음 그림과 같은 부채꼴에서 호의 길이 l 과 넓이 S 는?



[배점 4.0, 중중]

- ① $l = 10\pi$, $S = 90\pi$
 ② $l = 15\pi$, $S = 90\pi$
 ③ $l = 10\pi$, $S = 135\pi$
 ④ $l = 15\pi$, $S = 135\pi$
 ⑤ $l = 25\pi$, $S = 135\pi$

해설

$$l = 2\pi \times 18 \times \frac{150^\circ}{360^\circ} = 15\pi$$

$$S = \pi \times 18^2 \times \frac{150^\circ}{360^\circ} = 135\pi$$



20. 다음 그림과 같이 물이 가득 차 있는 반지름이 5cm 인 원기둥 모양의 입체도형에 구 세 개를 꼭 맞게 넣었다. 남아있는 물의 양을 구하여라.



[배점 4.0, 중중]

▶ 답 : cm^3

▷ 정답 : $250\pi \text{ cm}^3$

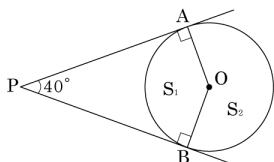
해설

통의 부피는 $\pi \times 5^2 \times 30 = 750\pi(\text{cm}^3)$

공 1개의 부피는 $\frac{4}{3}\pi \times 5^3 = \frac{500}{3}\pi(\text{cm}^3)$

공 주위의 빈 공간의 부피는 $750\pi - 3 \times \frac{500}{3}\pi = 250\pi(\text{cm}^3)$

21. 다음 그림에서 반직선 PA, PB 는 원 O 의 접선이고, 점 A, B 는 접점이고, $\angle APB = 40^\circ$ 이다. $\overline{OA}, \overline{OB}$ 에 의하여 나누어지는 원 O 의 두 부분의 넓이를 S_1, S_2 라고 할 때, 두 부채꼴의 넓이 $S_1 : S_2$ 는?



[배점 4.0, 중하]

- ① 3 : 5 ② 4 : 7 ③ 5 : 9

- ④ 7 : 11 ⑤ 7 : 13

해설

$$\angle AOB = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

부채꼴의 넓이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$$S_1 : S_2 = 140^\circ : 220^\circ = 7 : 11 \text{ 이다.}$$

22. 밑면의 반지름의 길이가 6cm 이고 모선의 길이가 10cm 인 원뿔의 전개도에서 부채꼴의 중심각의 크기는? [배점 4.0, 중하]

- ① 144° ② 152° ③ 216°
④ 240° ⑤ 270°

해설

$$2\pi \times 10 \times \frac{x}{360^\circ} = 2\pi \times 6$$

$$x = 360^\circ \times \frac{6}{10}$$

$$\therefore x = 216^\circ$$

23. 모서리의 개수가 20 개인 각기둥의 꼭짓점의 개수를 v , 면의 개수를 f 라 할 때, $v + f$ 의 값을 구하여라. [배점 4.0, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

**해설**

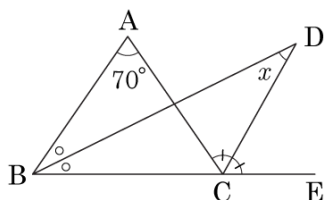
$v - e + f = 2$ (오일러의 법칙) 에서

$$e = 20$$

$$v - 20 + f = 2$$

$$v + f = 20 + 2 = 22$$

24. 다음 그림에서 $\angle x$ 의 크기는?



[배점 4.0, 중하]

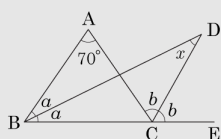
① 50°

② 45°

③ 40°

④ 35°

⑤ 30°

해설

$$70^\circ + 2\angle a = 2\angle b$$

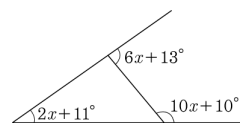
$$\angle b = \angle x + \angle a$$

$$70^\circ + 2\angle a = 2(\angle x + \angle a) = 2\angle x + 2\angle a$$

$$2\angle x = 70^\circ$$

$$\therefore \angle x = 35^\circ$$

25. 다음 그림에서 $\angle x$ 의 값은?



[배점 4.0, 중하]

① 10°

② 11°

③ 12°

④ 13°

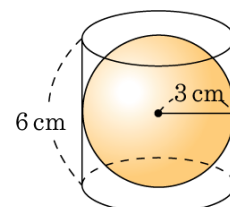
⑤ 14°

해설

$$\begin{aligned} 6x + 13^\circ &= 2x + 11^\circ + 180^\circ - (10x + 10^\circ) \\ &= 181^\circ - 8x \end{aligned}$$

$$\therefore \angle x = 12^\circ$$

26. 다음과 같이 반지름의 길이가 3cm 인 공이 꼭 맞게 들어가는 원기둥에 물을 가득 채운 후 공을 넣었다 뺐을 때, 남아 있는 물의 부피를 구하여라.



[배점 4.0, 중하]

▶ 답 :

$$\pi \text{ cm}^3$$

▷ 정답 : $18 \pi \text{ cm}^3$

해설

반지름의 길이가 3cm 이고 높이가 6cm 인 원기둥의 부피에서 반지름의 길이가 3cm 인 공의 부피를 뺀 것이 원기둥에 남아 있는 물의 부피이다. 따라서 $(\pi \times 3^2 \times 6) - (\frac{4}{3} \pi \times 3^3) = 18\pi (\text{cm}^3)$ 이다.



27. 대각선의 총수가 14개인 다각형과 35개인 다각형을
순서대로 나열하면? [배점 4.0, 중중]

- ① 육각형, 구각형 ② 육각형, 십각형
③ 칠각형, 구각형 ④ 칠각형, 십각형
⑤ 팔각형, 팔각형

해설

대각선의 총수가 14개인 다각형은

$$\frac{n(n-3)}{2} = 14, n(n-3) = 28$$

$$n(n-3) = 7 \times 4 \quad \therefore n = 7$$

따라서 $n = 7$ 이므로 칠각형이다

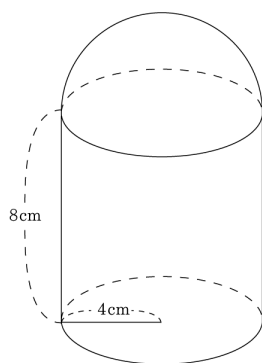
대각선의 총수가 35개인 다각형은

$$\frac{n(n-3)}{2} = 35, n(n-3) = 70$$

$$n(n-3) = 10 \times 7 \quad \therefore n = 10$$

따라서 $n = 10$ 이므로 십각형이다

28. 다음 그림과 같은 입체도형의 겉넓이를 구하여라.



[배점 4.0, 중중]

▶ 답: cm^2

▷ 정답: $112\pi \text{ cm}^2$

해설

$$\text{반구} : S_1 = 4\pi \times 16 \times \frac{1}{2} = 32\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{가운데 원기둥의 옆면} : S_2 = 8 \times 8\pi = 64\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{밑면} : S_3 = 16\pi \text{ cm}^2$$

$$\therefore S = S_1 + S_2 + S_3 = 32\pi + 64\pi + 16\pi = 112\pi \text{ cm}^2$$

29. 십이각형의 내각의 합과 외각의 합의 차를 구하여라.
[배점 3.5, 하상]

▶ 답: °

▷ 정답: 1440°

해설

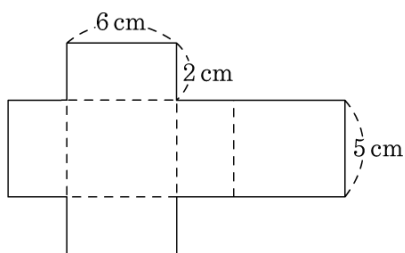
십이각형의 내각의 합은 $180^\circ \times (12 - 2) = 180^\circ \times 10 = 1800^\circ$ 이다.

또한, 외각의 합은 360° 이다.

따라서 내각의 합과 외각의 합의 차는 $1800^\circ - 360^\circ = 1440^\circ$ 이다.



30. 전개도가 다음 그림과 같은 사각기둥의 겉넓이는?



[배점 3.5, 하상]

- ① 80 cm^2 ② 104 cm^2 ③ 128 cm^2
 ④ 160 cm^2 ⑤ 208 cm^2

해설

$$(6 \times 2) \times 2 + (6 + 2 + 6 + 2) \times 5 = (\text{겉넓이})$$

$$24 + 16 \times 5 = 104$$

$$(\text{겉넓이}) = 104 \text{ cm}^2$$

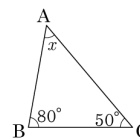
31. 사각뿔을 밑면이 평행한 평면으로 자를 경우 위쪽은 사각뿔, 아래쪽은 사각뿔대로 나누어진다. 이 때, 옆면의 모양을 각각 구하면? [배점 3.5, 하상]

- ① 삼각형, 직사각형
 ② 삼각형, 사다리꼴
 ③ 삼각형, 삼각형
 ④ 직사각형, 직사각형
 ⑤ 직사각형, 정사각형

해설

각뿔의 옆면의 모양은 삼각형, 각뿔대는 사다리꼴이다.

32. 다음 그림에서 $\angle x$ 의 크기는?



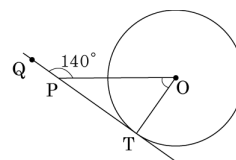
[배점 3.5, 하상]

- ① 40° ② 45° ③ 50°
 ④ 55° ⑤ 60°

해설

삼각형의 내각의 크기의 합은 180° 이므로
 $80^\circ + \angle x + 50^\circ = 180^\circ$
 $\therefore \angle x = 50^\circ$

33. 다음 그림에서 직선 QT 는 원 O 의 접선이다. $\angle QPO = 140^\circ$ 일 때, $\angle POT$ 의 크기를 구하여라.



[배점 3.5, 하상]

▶ 답: °

▷ 정답: 50°

해설

$\angle OPT = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$
 직선 QT 가 원 O 의 접선이므로 $\angle PTO = 90^\circ$,
 삼각형 세 내각의 합은 180° 이므로
 $\angle POT = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ 이다.