

집합-자연수의 성질

1. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 49 \text{의 소인수}\}$, 집합 $B = \{x \mid x \text{는 } 120 \text{의 소인수}\}$ 에 대하여 $n(A) + n(B)$ 의 값은?
[배점 5.0, 상상]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$49 = 7^2$, $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ 이므로
 $A = \{7\}$, $B = \{2, 3, 5\}$
 $\therefore n(A) + n(B) = 1 + 3 = 4$

2. 자연수 약수의 개수가 9 개인 어떤 수를 소인수분해했더니 $2^2 \times \square$ 가 되었다. $\square$ 안에 들어갈 가장 작은 수는 무엇인지 구하여라.
[배점 5.0, 상상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 9

해설

$9 = 9 \times 1 = 3 \times 3$
 i) $9 = 8 + 1$
 $2^2 \times \square = 2^8$
 $\therefore \square = 2^6$
 ii) $9 = 3 \times 3 = (2+1) \times (2+1)$ 일 때,
 $2^2 \times \square = 2^2 \times a^2$ (단, a 는 2 가 아닌 소수이다.)
 $\therefore a = 3, 5, 7, \dots$
 $\therefore \square = 9, 25, 49$
 i), ii) 에서 가장 작은 수는 9 이다.

3. 자연수 a 의 약수의 개수를 $N(a)$ 로 나타낼 때 $N(600) \times N(a) = 96$ 인 자연수 a 중에서 가장 작은 수를 구하면?
[배점 5.0, 상중]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 12

해설

$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$ 이므로 $N(600) = 4 \times 2 \times 3 = 24$
 $24 \times N(a) = 96 \quad \therefore N(a) = 4$
 약수의 개수가 4 개인 가장 작은 자연수는
 $6 = 2 \times 3$ 이다.

4. 216 을 소인수분해하면 $2^a \times b^c$ 이다. 이때, $a + b + c$ 의 값은?
[배점 4.5, 중상]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

해설

$216 = 2^3 \times 3^3$
 따라서 $a = 3, b = 3, c = 3$
 $a + b + c = 9$

5. 두 자리의 자연수 A, B 에 대해서 $A = 5 \times a, B = 5 \times b$ 일 때, A, B 의 최대공약수는 $101_{(2)}$ 이고, 최소공배수는 $5 \times 11100_{(2)}$ 이다. $A > B$ 일 때, $a - b$ 의 값을 이진법으로 나타낸 것은?
[배점 4.5, 중상]

① $1_{(2)}$ ② $10_{(2)}$ ③ $11_{(2)}$
 ④ $100_{(2)}$ ⑤ $101_{(2)}$

해설

$$101_{(2)} = 4 + 1 = 5$$

$A = 5 \times a, B = 5 \times b$ 에서 최대공약수가 5 이므로 a, b 는 서로소이다.

따라서 A, B 의 최소공배수는

$$5 \times a \times b = 5 \times 11100_{(2)} = 5 \times 28$$

a, b 가 서로소이므로 $(2, 14), (14, 2)$ 는 될 수 없다.

따라서 $(a, b) = (4, 7)$ 또는 $(7, 4)$ 이고 $A > B$ 이라 했으므로 $a = 7, b = 4$ 이다.

$$a - b = 3 = 11_{(2)} \text{ 이다.}$$

6. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A - B) = 20, n(A^c \cap B) = 12, n(A \cup B) = 48$ 일 때, $n(A \cap B)$ 를 구하여라.
[배점 4.5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 16

해설

$$A^c \cap B = B - A$$

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(A^c \cap B)$$

$$48 = 20 + n(A \cap B) + 12$$

$$\therefore n(A \cap B) = 16$$

7. 다음 안에 알맞은 세 자연수의 합을 구하여라.

보기

$$\textcircled{1} n(\{x|x \text{는 } \square \text{미만의 자연수}\}) = 4$$

$$\textcircled{2} n(\{a, b, c, d\}) - n(\{b, c, d\}) = \square$$

$$\textcircled{3} A \subset \{1, 2, 3\} \text{ 이고, } n(A) = 2 \text{ 를 만족하는 집합 } A \text{ 의 개수는 } \square \text{ 개이다.}$$

[배점 4.5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 9

해설

$$\textcircled{1} n(\{x|x \text{는 } 5 \text{ 미만의 자연수}\}) = 4$$

$$\textcircled{2} n(\{a, b, c, d\}) - n(\{b, c, d\}) = 1$$

$\textcircled{3} A \subset \{1, 2, 3\}$ 이고, $n(A) = 2$ 를 만족하는 집합 A 는 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ 의 3 개
 $\therefore 5 + 1 + 3 = 9$

8. 두 집합 $A = \{\neg, \neg, \neg, \neg\}, B = \{\neg, \neg, \neg, \neg\}$ 에 대하여 집합 A 의 부분집합이면서 집합 B 의 부분집합이 되는 집합의 개수는? [배점 4.0, 중중]

① 0 개 ② 2 개 ③ 4 개

④ 6 개 ⑤ 8 개

해설

집합 A 의 부분집합도 되고 집합 B 의 부분집합도 되는 집합은 $\{\neg, \neg, \neg\}$ 의 부분집합과 같으므로 $2^3 = 8$ (개)

9. 세 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 4\text{의 배수}\}$, $B = \{a, \{a, b\}, \{a, b, \emptyset\}\}$, $C = \{\emptyset, \{0, \emptyset\}\}$ 일 때, $n(A) - n(B) - n(C)$ 를 구하면? [배점 4.0, 중중]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 0

해설

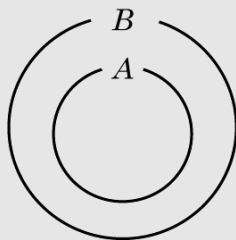
$A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 4\text{의 배수}\} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ 이므로 $n(A) = 5$ 이고, $n(B) = 3$, $n(C) = 2$ 이므로 $n(A) - n(B) - n(C) = 0$ 이다.

10. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cap B = A$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것은? [배점 4.0, 중하]

① $A \cap B = \emptyset$ ② $A \cup B = U$
 ③ $B \subset A^c$ ④ $A - B = \emptyset$
 ⑤ $B \cap A^c = \emptyset$

해설

$A \cap B = A$ 이면 집합 A, B 는 다음 벤 다이어그램과 같은 포함관계를 만족한다.



① $A \cap B = A$
 ② $A \cup B = B$
 ③ $B \not\subset A^c$
 ⑤ $B \cap A^c \neq \emptyset$

11. 가로와 세로의 길이가 8cm, 세로의 길이가 12cm 인 타일이 있다. 이것을 붙여서 제일 작은 정사각형을 만들 때, 모두 몇 개의 타일이 필요한지 구하여라.

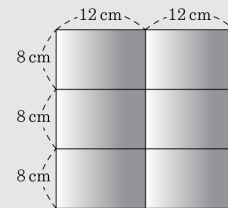
[배점 4.0, 중중]

▶ 답: 개

▷ 정답: 6 개

해설

조건을 만족하는 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이는 8 과 12 의 최소공배수이므로 8 과 12 의 최소공배수를 구하면 24 이다. 필요한 타일의 개수는 $(24 \div 8) \times (24 \div 12) = 3 \times 2 = 6$ 이다. 즉, 6 개를 붙이면 최소의 정사각형이 된다.



12. 남자 70 명, 여자 56 명인 어떤 모임에서 조 대항 장기자랑을 하려고 한다. 조별 인원수가 같고, 각 조에 속하는 남녀의 비가 같도록 최대한 많은 수의 조를 짤 때, 각 조별 남, 녀의 수는? [배점 4.0, 중중]

① 남 : 7명, 여 : 6명 ② 남 : 6명, 여 : 5명
 ③ 남 : 6명, 여 : 4명 ④ 남 : 5명, 여 : 5명
 ⑤ 남 : 5명, 여 : 4명

해설

조의 개수는 70 과 56 의 최대공약수이다.
 $70 = 2 \times 5 \times 7$, $56 = 2^3 \times 7$
 따라서 조의 개수는 $2 \times 7 = 14$ (개)
 조별 남학생의 수는 $70 \div 14 = 5$ (명), 여학생의
 수는 $56 \div 14 = 4$ (명)이다.

13. 어떤 자연수를 3 으로 나누면 1 이 남고, 4 로 나누면 2
 가 남는다고 한다. 이러한 조건을 만족하는 자연수 중
 가장 작은 수를 구하면? [배점 3.5, 하상]

① 10 ② 12 ③ 8 ④ 22 ⑤ 14

해설

구하는 수는 3, 4 로 나눌 때 2 가 부족한 수이므로
 (3 과 4 의 공배수)-2 인 수이다.
 3, 4 의 최소공배수가 12 이므로 가장 작은 자연
 수는 $12 - 2 = 10$ 이다.
 $\therefore 10$

14. 다음 중에서 홀수인 것을 골라라.

- ㉠ $10010_{(2)}$ ㉡ $11011_{(2)}$
 ㉢ $10010_{(2)}$ ㉣ $10100_{(2)}$
 ㉤ $110110_{(2)}$

[배점 3.5, 하상]

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉡

해설

(짝수) $= a \times 2$ (a 는 자연수) 이므로
 홀수는 이진법으로 나타낼 때 일의 자리의 숫자가
 1 이 된다.

15. 다음 중 옳은 것은? [배점 3.5, 하상]

- ① 0 은 모든 자연수의 약수이다.
 ② 합성수의 약수는 4 개 이상이다.
 ③ 소수가 아닌 자연수는 모두 합성수이다.
 ④ 소수의 약수는 1 과 자기 자신뿐이다.
 ⑤ 소수는 홀수이다.

해설

소수는 1 보다 큰 자연수 중에서 1 과 자기 자신만
 을 약수로 가지는 수이다.