

1028문제풀이

1. 세 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10\text{이하의 자연수}\}$, $B = \{4, 6, 9, 12\}$, $C = \{x \mid x \text{는 } 28\text{의 약수}\}$ 에 대하여 $(A \cup B) \cap C$ 는?
[배점 4, 중중]

- ① $\{2, 4, 7, 14\}$
 ② $\{1, 2, 4, 7, 14\}$
 ③ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$
 ④ $\{1, 2, 4, 7\}$
 ⑤ $\{1, 2, 7\}$

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고치면 $C = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$ 이다.
 먼저 A 와 B 의 합집합을 구하면 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$ 이다.
 $(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 4, 7\}$ 이다.

2. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 원소의 개수가 2개인 부분집합 중 원소의 합이 5인 집합은 몇 개인가?
[배점 4, 중중]

- ① 2개 ② 3개 ③ 4개
 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

원소의 개수가 2개인 A 의 부분집합: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$
 이 중 원소의 합이 5인 집합은 $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$ 이다.

3. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?(정답 2개)
[배점 4, 중중]

- ① $B - A = \emptyset$
 ② $A \cap B^c = A$
 ③ $A^c \subset B^c$
 ④ $(A \cap B^c) \cap (B \cap A^c) = \emptyset$
 ⑤ $U^c \subset \emptyset$

해설

- ① $B - A = \emptyset$
 ② $A \cap B^c = \emptyset$
 ③ $B^c \subset A^c$

4. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 16\text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 17 \text{미만의 소수}\}$ 일 때, $n((A \cup B) - (A \cap B))$ 를 구하면?
[배점 4, 중중]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$
 $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
 $A \cap B = \{2\}$
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 16\}$
 $(A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 16\}$
 $\therefore n((A \cup B) - (A \cap B)) = 9$

5. 216 을 소인수분해하면 $2^a \times 3^b$ 이다. 이때, $a + b + c$ 의 값은? [배점 5, 중상]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

해설

$$216 = 2^3 \times 3^3$$

따라서 $a = 3, b = 3, c = 3$

$$a + b + c = 9$$

6. 집합 $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은? [배점 5, 중상]

① $n(A) = 0$ ② $0 \in A$ ③ $\{\emptyset\} \notin A$

④ $\emptyset \in A$ ⑤ $\{0\} \subset A$

해설

집합 A 의 원소는 $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 이므로

① $n(A) = 3$

② $0 \notin A$

③ $\{\emptyset\} \in A$

⑤ $\{0\} \not\subset A$

7. $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ 를 만족하는 자연수 $a_k (k = 1, 2, \dots, 5)$ 를 원소로 하는 집합 A 와 집합 $B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{a_1, a_4\}$ 이고 $a_1 + a_4 = 10$ 이다. $A \cup B$ 의 원소의 합이 224 일 때, $a_2 + a_3 + a_5 + a_2^2 + a_3^2 + a_5^2$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 142

해설

$A \cap B = \{a_1, a_4\}$ 에서 a_1, a_4 모두 제곱수이고, 두 수의 합이 10 이므로 $a_1 = 1, a_4 = 9$

9 가 집합 B 의 원소이므로 집합 A 의 원소 중에는 3 이 포함되고, 또 9 가 집합 A 의 원소이므로 집합 B 의 원소 중에는 81 이 포함된다. 또, a_5 가 a_4 보다 크지만 a_5 가 10 보다 커지면 합집합이 224 보다 커지므로 a_5 는 10 이 되고, 차례로 대입하면 $a_3 = 4$ 가 된다.

$$A = \{1, 3, 4, 9, 10\}$$

$$B = \{1, 9, 16, 81, 100\}$$

$$\therefore a_2 + a_3 + a_5 + a_2^2 + a_3^2 + a_5^2 = 3 + 4 + 10 + 9 + 16 + 100 = 142$$

8. 자연수 a 의 약수의 개수를 $f(a)$ 이라 할 때, $f(30) \times f(x) = 32$ 를 만족시키는 가장 작은 자연수 x 의 값은? [배점 5, 상하]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$30 = 2 \times 3 \times 5$ 로 소인수분해되므로
 $f(30) = (1+1) \times (1+1) \times (1+1) = 8$ 이다.
 $f(30) \times f(x) = 32$ 에서 $f(x) = 4$
 약수의 개수가 4 인 가장 작은 자연수는 $2 \times 3 = 6$
 이다.

해설

$n = 12 \times a$,
 $n + 45 = 12 \times a + 45 = 13 \times b$ 를 만족하는
 $12 \times a + 45$ 는 117 이고 n 은 72 이다.
 $\therefore (72 \text{와 } 45 \text{의 최소공배수}) = 360$

9. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?(정답 2개)

[배점 5, 상하]

① $3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 = 3^2 \times 2^5 \times 7$

② $\frac{1}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{5^4}$

③ $\frac{1}{3 \times 3 \times 7 \times 7} = \frac{1}{3^2 \times 7^2}$

④ $\frac{1}{7^4 \times 7^5} = \left(\frac{1}{9}\right)^7$

⑤ $a \times a \times a \times b \times b \times c = a^3 \times b^2 \times c^2$

해설

① $3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 = 3^2 \times 5^2 \times 7$,

④ $\frac{1}{7^4 \times 7^5} = \left(\frac{1}{7}\right)^9$,

⑤ $a \times a \times a \times b \times b \times c = a^3 \times b^2 \times c$

10. 두 자리 자연수 n 과 48 의 최대공약수가 12 이고
 $(n + 45)$ 가 13 의 배수일 때, n 과 45 의 최소공배
 수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 360