문제 풀이 과제

1. 두 집합 $A = \{2, 4, 6, 8, \cdots, 100\}$, $B = \{x|x$는 한 자리의 자연수$\}$ 에 대하여 $n(A)+n(B)$ 의 값을 구하여라. [배점 3, 하상]

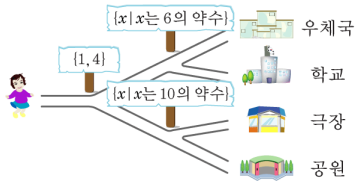
▶ 답:

▷ 정답: 59

해설

$100 \div 2 = 50$ 이므로 $n(A) = 50$, $B = \{1, 2, 3, \cdots, 9\}$ 이므로 $n(B) = 9$
따라서 $n(A)+n(B) = 50+9 = 59$ 이다.

2. 미선이는 길을 가다가 갈림길을 만났을 때, 갈림길의 이정표에 적힌 집합이 집합 {1, 2, 4} 의 진부분집합이면 왼쪽으로 가고, 집합 {1, 2, 4} 의 진부분집합이 아니면 오른쪽으로 간다고 한다. 미선이가 도착하는 곳은 어디인지 구하여라.



[배점 3, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: 학교

해설

{1, 2, 4} 의 진부분집합은 ∅, {1}, {2}, {4}, {1, 2}, {1, 4}, {2, 4} 이다.
{1, 4} 는 진부분집합이므로 첫 번째 갈림길에서 왼쪽으로 가고, $\{x \mid x$는 6의 약수$\} = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로 두 번째 갈림길에서 오른쪽으로 간다.
따라서 미선이가 도착하는 곳은 학교이다.

3. 집합 $A = \{0, 1, 2\}$ 의 부분집합 중 원소 0은 반드시 포함하고 짝수인 원소는 포함하지 않는 부분집합을 모두 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: {0}

▷ 정답: {0, 1}

해설

집합 A 의 부분집합 중 원소 0은 반드시 포함하고 짝수인 원소 2를 포함하지 않는 부분집합을 원소의 개수별로 차례대로 구하면 {0}, {0, 1} 이다

4. 집합 $A = \{1, 2, 4\}$ 의 부분집합 중 원소 2 또는 4 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답: 개

▷ 정답: 6 개

해설

원소 2 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{3-1} = 4$ (개)
원소 4 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{3-1} = 4$ (개)
원소 2, 4 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{3-2} = 2$ (개)
원소 2 또는 4 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$4 + 4 - 2 = 6$ (개)

5. 두 집합 $A = \{x | x$는 4의 약수$\}$, $B = \{1, 2, 3, a\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

[배점 3, 중하]

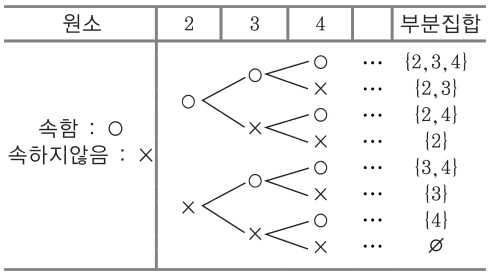
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, a\}$
$4 \in B$ 이어야 하므로 $a = 4$ 이다.

6. 다음은 집합 $\{2, 3, 4\}$ 의 부분집합을 구하는 과정이다. 원소 2, 3, 4 중에서 원소를 골라 부분집합을 만들 때, 각 원소는 부분집합에 속하거나, 속하지 않는 2 가지 경우가 생기므로 다음 그림과 같이 구할 수 있다.



이와 같은 방법으로 집합 $\{2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합의 갯수를 구하여라.

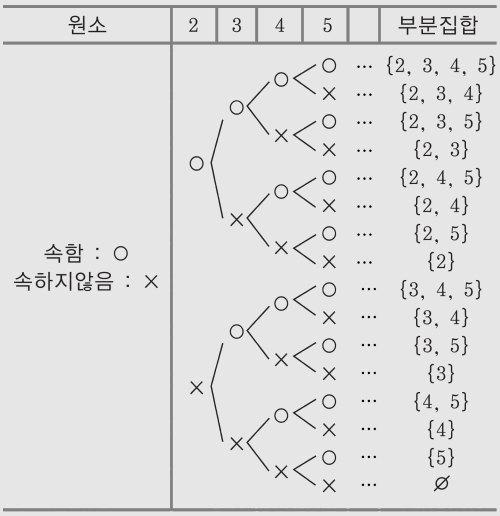
[배점 3, 중하]

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 16 개

해설

집합 $\{2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합을 모두 구해보면 다음과 같다.



따라서 부분집합의 갯수는 16 개 이다.

7. $n(\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}) - n(\{1,\ 5,\ 7\}) + n(\{0, \varnothing\})$ 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$n(\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}) - n(\{1,\ 5,\ 7\}) + n(\{0,\ \varnothing\})$
$= 4 - 3 + 2 = 3$

8. 집합 $A = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 2 의 배수를 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답: 개

▷ 정답: 28 개

해설

집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개) 이고, 이 중에서 2 의 배수를 원소로 하나도 갖지 않는 부분집합은 원소 3, 5 로 만든 부분집합이므로 $2^2 = 4$ (개) 이다.
$\therefore\ 32 - 4 = 28$ (개)

9. 집합 $A = \{x \mid x$는 $4 \le x \le 8$인 자연수$\}$ 의 부분집합 중에서 원소의 개수가 3 개인 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답: 개

▷ 정답: 10 개

해설

집합 $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가
3 개인 부분집합은
$\{4,\ 5,\ 6\}$, $\{4,\ 5,\ 7\}$, $\{4,\ 5,\ 8\}$,
$\{4,\ 6,\ 7\}$, $\{4,\ 6,\ 8\}$, $\{4,\ 7,\ 8\}$,
$\{5,\ 6,\ 7\}$, $\{5,\ 6,\ 8\}$, $\{5,\ 7,\ 8\}$, $\{6,\ 7,\ 8\}$ 의 10 개이다.

10. 자연수들로 이루어진 두 집합 X, Y 에 대하여 $X+Y = \{x+y \mid x \in X,\ y \in Y\}$ 라 하자. $X = \{3,\ 6,\ 9,\ \cdots\}$, $Y = \{5,\ 10,\ 15,\ \cdots\}$ 라 할 때, 집합 $X+Y$ 의 원소 중에서 20 이하의 자연수의 개수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답: 개

▷ 정답: 9 개

해설

$X+Y$ 가 20 이하인 수는
$x = 3$ 일 때, $y = 5,\ 10,\ 15$ 의 3 가지이고
$x = 6,\ 9$ 일 때, $y = 5,\ 10$ 의 각각 2 가지이고
$x = 12,\ 15$ 일 때, $y = 5$ 의 각각 1 가지이다. 따라서 모두 9 개이다.

11. 다음 그림과 같이 빨강, 초록, 파랑, 보라 4개의 전등으로 구성된 숫자판이 있다. 세 집합 A, B, C 가 각각 다음과 같을 때, □ 안에 기호 $\subset$, $=$ 중 알맞은 것을 차례대로 써넣어라.

$A = \{x \mid x$
는 숫자 4를 나타낼 때 켜지는 전등의 색$\}$
$B = \{x \mid x$
는 숫자 5를 나타낼 때 켜지는 전등의 색$\}$
$C = \{x \mid x$
는 숫자 6을나타낼 때 켜지는 전등의 색 $\}$

A □ C
B □ C [배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $\subset$

▷ 정답: $\subset$

해설

집합 A, B, C 를 각각 원소나열법으로 나타내면
$A = \{$파랑 , 보라 , 초록$\}$,
$B = \{$빨강 , 파랑 , 보라$\}$,
$C = \{$빨강 , 파랑 , 보라 , 초록$\}$ 이다.
따라서 $A \subset C, B \subset C$ 이다.

12. 집합 $A = \{x \mid x$는 12의 약수$\}$ 일 때, 적어도 하나의 원소가 홀수인 집합 A 의 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답: 개

▷ 정답: 48 개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 적어도 하나는 홀수인 부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 짝수의 원소로만 이루어진 부분집합의 개수를 빼면 되므로 $2^6 - 2^{6-2} = 64 - 16 = 48$ (개) 이다.

13. $n(\{0, \varnothing, \{0,2\}, \{1\}\}) \times n(\{0,1\}) - n(\varnothing)$ 를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$n(\{\{0\}, \varnothing, \{0,2\}, \{1\}\}) \times n(\{0,1\}) - n(\varnothing) = 4 \times 2 - 0 = 8$

14. 집합 $A = \{1, 2, 4, 8, \cdots, 2^m\}$ 의 부분집합 중에서 1 과 2 는 반드시 포함하고, 2 를 제외한 짝수 번째 원소들은 포함하지 않는 부분집합의 개수가 64 개일 때, 자연수 m 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

1 과 2 는 반드시 포함하고 2 를 제외한 짝수 번째 원소들의 개수 $\frac{m}{2}-1$ (개)는 반드시 포함하지 않으므로

$2^{m-2-(\frac{m}{2}-1)}=64$ 이므로

$m-2-(\frac{m}{2}-1)=6,\ \frac{m}{2}-1=6$,

$m=14$

15. 집합 $S=\{x \mid x<9, x$는 자연수$\}$의 부분집합 $A=\{x \mid x \in A$이면 $12-x \in A\}$가 있다. 집합 A 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 7 개

해설

$A=\{x \mid x \in A$이면 $12-x \in A\}$ 라는 조건을 보면,

집합 A 는 더해서 12 가 되는 두 개의 자연수를 원소로 가진다.

9 보다 작은 수 중에 더해서 12 가 되는 수의 쌍은 $(4,8),\ (5,7),\ (6,6)$ 이다.

따라서 집합 A 가 될 수 있는 집합은

$\{6\}, \{4,8\}, \{5,7\}, \{4,6,8\}, \{5,6,7\}, \{4,5,7,8\}, \{4,5,6,7,8\}$ 로 7 개이다.