실력3

1. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3, \cdots, n\}$ 의 부분집합의 개수가 16 개일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

[배점 3, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$2^n = 16 \ \therefore n = 4$

2. 연필 28 개와 지우 개35 개모두를 가능한 한 많은 학생에게 똑같이 나누어 주려고 한다. 이때, 몇 명에게 나누어 줄 수 있는지 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답: 명

▷ 정답: 7 명

해설

28 와 35 의 최대공약수는 7 이다

3. 4 개의 전등이 있다. 켜져 있는 전등을 1, 꺼져 있는 전등을 0 으로 나타낼 때, 이 4 개의 전등이 나타낼 수 있는 자연수의 개수를 모두 구하면?

[배점 3, 하상]

① 7 개 ② 8 개 ③ 15 개

④ 16 개 ⑤ 31 개

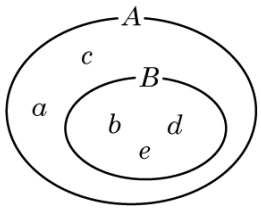
해설

0, 1 로만 이루어지는 이진법으로 나타내면 수를 구하면 된다.

$1_{(2)}$, $10_{(2)}$, $11_{(2)}$, $100_{(2)}$, $101_{(2)}$, $110_{(2)}$, $111_{(2)}$, $1000_{(2)}$, $1001_{(2)}$, $1010_{(2)}$, $1011_{(2)}$, $1100_{(2)}$, $1101_{(2)}$, $1110_{(2)}$, $1111_{(2)}$

$\therefore$ 총 15 가지

4. 다음 벤 다이어그램에서 집합 A 의 부분집합 중 집합 B 의 원소를 반드시 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.



[배점 3, 중하]

▶ 답: 개

▷ 정답: 4 개

해설

집합 A, B 를 원소나열법으로 나타내면 $A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{b, d, e\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합 중 집합 B 의 원소를 반드시 포함하는 부분집합을 구하면 $\{b, d, e\}, \{a, b, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}$ 이고 개수는 4 개이다.

5. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 43$, $n(B) = 28$, $n(A \cup B) = 50$ 일 때, $n(A - B) + n(B - A)$ 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 29

해설

$n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)=50-28=22$

$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)=50-43=7$

$\therefore\ n(A-B)+n(B-A)=22+7=29$

6. 가로, 세로, 높이가 각각 18, 10, 6 인 벽돌이 있다. 이 벽돌을 쌓아 가장 작은 정육면체를 만들 때, 필요한 벽돌의 개수는? [배점 3, 중하]

① 90 개 ② 450 개 ③ 545 개

④ 675 개 ⑤ 735 개

해설

정육면체의 한 모서리의 길이는 18, 10, 6 의 최소공배수이므로 90 이다.

필요한 벽돌의 개수는

$(90\div 18)\times(90\div 10)\times(90\div 6)=5\times 9\times 15=675$(개) 이다.

7. 다음은 가람이와 다솜이의 대화이다. ☐ 안에 알맞은 말이나 수를 차례대로 써넣어라.

가람 : 드디어 구했어! 다솜아!
다솜 : 무엇을 구했는데?
가람 : 두 수의 최대공약수를 구했어. 50이 답이야.
다솜 : 그럼 그 두 수의 공약수의 개수도 구할 수 있겠네?
가람 : 잠깐만, 아까 두 수가 뭐였더라.
다솜 : 최대공약수만 알면 두 수를 몰라도 공약수를 구할 수 있잖아.
가람 : 그럼, ☐의 약수의 개수와 두 수의 공약수의 약수의 개수도 같지!
다솜 : 맞아!
가람 : 공약수의 개수는 ☐개야.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최대공약수

▷ 정답 : 6

해설

가람 : 드디어 구했어! 다솜아!
다솜 : 무엇을 구했는데?
가람 : 두 수의 최대공약수를 구했어. 50이 답이야.
다솜 : 그럼 그 두 수의 공약수의 개수도 구할 수 있겠네?
가람 : 잠깐만, 아까 두 수가 뭐였더라.
다솜 : 최대공약수만 알면 두 수를 몰라도 공약수를 구할 수 있잖아.
가람 : 그럼, [최대공약수]의 약수의 개수와 두 수의 공약수의 약수의 개수도 같지!
다솜 : 맞아!
가람 : 공약수의 개수는 [6] 개야.

50을 소인수분해하면 $50 = 2 \times 5^2$ 이므로 약수의 개수는 $(1+1) \times (2+1) = 6$ (개) 이다.

8. 다음 □ 안에 알맞은 세 자연수를 차례대로 나열한 것은?

보기

㉠ $n(\{x \mid x$는 12 의 약수$\}) =$ □

㉡ 집합 $B = \{0\}$ 일 때, $n(B) =$ □

㉢ $A \subset \{ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ\}$ 이고 $n(A) = 3$을 만족하는 집합은 A의 개수는 □ 개이다.

[배점 3, 중하]

① 5, 0, 4 ② 6, 0, 3 ③ 6, 1, 3
④ 6, 1, 4 ⑤ 12, 1, 3

해설

㉠ $n(\{x|x$는 12의 약수$\}) = 6$
㉡ 집합 $B = \{0\}$ 일 때, $n(B) = 1$
㉢ $A \subset \{ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ\}$ 이고 $n(A) = 3$ 을 만족하는 집합 A 는 {ㄱ, ㄴ, ㄷ}, {ㄱ, ㄴ, ㄹ}, {ㄱ, ㄷ, ㄹ}, {ㄴ, ㄷ, ㄹ} 이므로 4개이다.
따라서 세 자연수는 차례대로 6, 1, 4 이다.

9. $84\underline{1}03$ 에서 밑줄 친 1 이 실제로 나타내는 값을 x , $1\underline{1}011_{(2)}$ 에서 밑줄 친 1 이 실제로 나타내는 값을 y 라고 할 때, $x+y$ 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 108

해설

$84\underline{1}03$ 의 1 은 100 을 나타내고, $1\underline{1}011_{(2)}$ 의 1 은 $2^3 = 8$ 을 나타낸다. 따라서 $x = 100$, $y = 8$ 이고, $100 + 8 = 108$ 이다.

10. 사과 68 개, 귤 111 개, 배 82 개를 될 수 있는대로 많은 학생에게 똑같이 나누어 주면, 사과는 8 개가 남고, 귤은 1 개가 남고 배는 8 개가 모자란다고 한다. 이때, 학생 수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 10 명

해설

학생 수는 $68-8=60$, $111-1=110$, $82+8=90$ 의 최대공약수이므로 10 (명)

11. 두 집합 $A=\{5,\ 7,\ 10\}$, $B=\{x-4,\ x-2,\ x+1\}$ 이 서로 같을 때, x 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 9

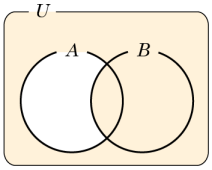
해설

$x-4$, $x-2$, $x+1$ 의 크기를 비교해 보면 $x-4<x-2<x+1$ 이므로

$A=B$ 이려면 $x-4=5$, $x-2=7$, $x+1=10$ 이 되어야 한다.

따라서 $x=9$ 이다.

12. 다음 벤 다이어그램에서 색칠한 부분이 나타내는 집합은?



[배점 4, 중중]

① $A^c\cap B^c$ ② $(A\cap B)^c$ ③ $B\cup A^c$

④ $A^c\cap B^c$ ⑤ B^c-A

해설

주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분은 ③ $B\cup A^c$ 이다.

13. 집합 $A=\{x|x$는 최대공약수가 26인 두 자연수의 공약수$\}$ 일 때, 집합 A 의 원소인 것은? [배점 4, 중중]

① 4 ② 8 ③ 13 ④ 16 ⑤ 24

해설

공약수는 최대공약수의 약수

26 의 약수: 1, 2, 13, 26

14. 어떤 자연수에 12 를 곱하여, 45 와 60 의 공배수가 되게 하려고 한다. 이러한 자연수 중에서 가장 작은 수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

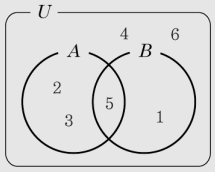
45 와 60 의 최소공배수는 180 이다. 12 를 곱하여 180 이 나오는 수는 15 이다.

15. 전체집합 $U = \{1,2,3,4,5,6\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cap B = \{5\}, A \cap B^c = \{2,3\}, A \cup B = \{1,2,3,5\}$ 일 때, $A^c \cap B$ 는? [배점 4, 중중]

① $\{1\}$ ② $\{2\}$ ③ $\{1,2\}$
④ $\{1,3\}$ ⑤ $\{1,4\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $A^c \cap B = B - A = \{1\}$ 이다.



16. 전체집합 U $= \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1,\ 3\}$, $B = \{3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여 다음 친구들의 대화 중 옳지 않게 말한 사람은 누구인지 말하여라.

성실 : 집합 A 에 속하지 않는 원소는 2, 4, 5야.
모범 : 집합 A 에 속하거나 속하지 않는 원소들의 집합은 전체집합 U 와 같아.
다정 : 집합 B 에만 속하는 원소는 5 밖에 없어.

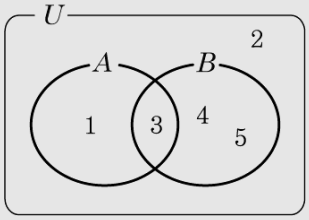
[배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 다정

해설

벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다. ∴ 다정 : 집합 B 에만 속하는 원소는 4, 5이다.



17. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $n(A) = 14$, $n(B) = 31$ 일 때, $n(A \cup B) - n(A \cap B)$ 의 값은? [배점 4, 중중]

① 3 ② 7 ③ 12 ④ 17 ⑤ 22

해설

$A \subset B$ 이므로 $A \cup B = B$, $A \cap B = A$,
$n(A \cup B) - n(A \cap B) = n(B) - n(A) = 31 - 14 = 17$

18. 두 수 $2^2 \times 3^3$ 과 A 의 최대공약수가 $2^2 \times 3^2$, 최소공배수가 $2^3 \times 3^3 \times 7$ 일 때, 자연수 A 의 값은? [배점 4, 중중]

① 500 ② 502 ③ 504
④ 506 ⑤ 508

해설

$A \times 2^2 \times 3^3 = 2^2 \times 3^2 \times 2^3 \times 3^3 \times 7$
$\therefore A = 504$

19. 432를 자연수 x 로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 다음 중 x 의 값으로 알맞지 않은 것은? [배점 5, 중상]

① 3 ② 6 ③ 12 ④ 27 ⑤ 48

해설

$\frac{432}{x} = \square^2$

$432 = 2^4 \times 3^3$

나눠야 할 가장 작은 자연수는 3이다. 그러므로 3 또는 3× (지수가 짝수인 수)의 꼴이 아닌 것을 찾는다.

① 3

② 2×3

③ $2^2 \times 3$

④ 3^3

⑤ $2^4 \times 3$

20. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

$\{1, 3\} \subset X \subset A,\ n(X) = 4$

[배점 5, 중상]

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 3개

해설

X 는 원소 1, 3 을 뺀 $\{2, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 2개인 부분집합에 원소 1, 3 을 포함시킨 $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$ 의 3개이다.

21. 전체집합 $U = \{x \mid x$는 15 이하의 홀수$\}$에 대하여 $A = \{1, 3, 7, 11\}$, $B = \{7, 13\}$일 때, 다음 보기에서 옳지 않은 것은?

보기

㉠ $A \cap B = \{7\}$

㉡ $A \cap B^c = \{1, 3, 7, 11\}$

㉢ $A^c \cap B = \{13\}$

㉣ $A^c \cup B^c = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15\}$

㉤ $A^c \cap B^c = \{5, 9, 15\}$

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

해설

$U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$,

$A = \{1, 3, 7, 11\}$, $B = \{7, 13\}$

㉡ $A \cap B^c = A - B = \{1, 3, 11\}$

㉢ $A^c \cap B = B - A = \{13\}$

㉣ $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15\}$

㉤ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5, 9, 15\}$

22. 두 집합 A, B가 다음과 같을 때, $X \cap A = X$, $X \cup (A \cap B) = X$를 만족하는 집합 X의 개수는?

$A = \{x \mid x$는 5 이하의 자연수$\}$, $B = \{3, 5, 7\}$

[배점 5, 중상]

① 2개 ② 4개 ③ 6개

④ 8개 ⑤ 10개

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\},\ A \cap B = \{3, 5\}$,
$X \cap A = X$ 이므로 $X \subset A$,
$X \cup (A \cap B) = X$ 이므로 $(A \cap B) \subset X$
$\{3,\ 5\} \subset X \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$,
따라서 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 원소 $3,\ 5$ 를 반드시 포함하는 집합이므로
$2^{5-2} = 2^3 = 8$ 이다.