

실력수동

1. 다음은 임의의 자연수 n 에 대하여 『 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다』임을 증명한 것이다. 위의 증명 과정에서 (가), (나) 안에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

주어진 명제의 (가)를 구해보면 『 n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.』이 때, n 이 짝수이면 $n = (나)$ (단, k 는 자연수) 따라서 $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ 이므로 n^2 도 짝수이다.

[배점 3, 하상]

- ① 대우, $2k$ ② 대우, $4k$
 ③ 대우, $2k+1$ ④ 역, $2k+1$
 ⑤ 역, $4k^2$

해설

『 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다』의 대우는 『 n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.』
 $\therefore$ (가)-대우 n 이 짝수이면 $n = 2k$
 $\therefore$ (나)- $2k$

2. 50명의 수험생 중 문제 a 의 정답지는 36명, 문제 b 의 정답지는 29명, 문제 a, b 를 모두 정확히 푼 수험생은 21명이다. 이 때 문제 a, b 를 모두 틀린 수험생의 수를 구하면?

[배점 3, 하상]

- ① 2명 ② 4명 ③ 6명
 ④ 8명 ⑤ 12명

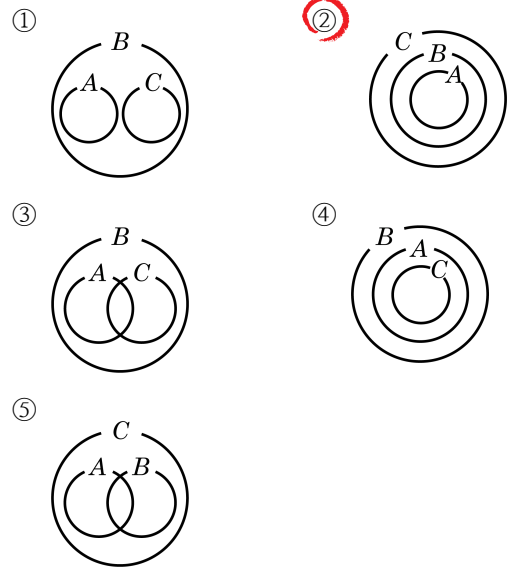
해설

문제 a 의 정답자를 A , 문제 b 의 정답자를 B 라고 할 때 $n(A) = 36$, $n(B) = 29$, $n(A \cap B) = 21$, $n(U) = 50$, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 44$
 $\therefore n(A^c \cap B^c) = n(U) - n(A \cup B) = 50 - 44 = 6$

3. 다음의 두 명제 p, q 가 참일 때,

$p : x \in A$ 이면 $x \in B$ 이다.
 $q : x \notin C$ 이면 $x \notin B$ 이다.

세 집합 A, B, C 사이의 포함관계를 벤다이어그램으로 옳게 나타낸 것은? [배점 3, 중하]



해설

조건 $p : A \subset B$ 조건 $q : C^c \subset B^c \leftrightarrow B \subset C$
 $\therefore A \subset B \subset C$

4. $A = \{1, 2\}$, $B = \{x + y \mid x \in A, y \in A\}$, $C = \{xy \mid x \in A, y \in A\}$ 일 때, 집합 $A \cup (B - C)$ 의 부분집합의 개수를 구하면? [배점 3, 중하]

- ① 3 개 ② 4 개 ③ 6 개
④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

$$B = \{2, 3, 4\}, C = \{1, 2, 4\}$$

$$\therefore B - C = \{3\}$$

$\therefore A \cup (B - C) = \{1, 2, 3\}$ 부분집합의 개수는 2^3 개

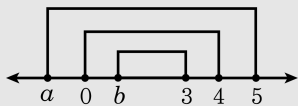
5. 두 조건 $a \leq x \leq 5$, $b \leq x \leq 3$ 이 각각 조건 $0 \leq x \leq 4$ 이기 위한 필요조건과 충분조건일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은? [배점 4, 중중]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$0 \leq x \leq 4 \Rightarrow a \leq x \leq 5$$

$$b \leq x \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4$$



$$\therefore a \leq 0, b \geq 0$$

a 의 최댓값, b 의 최솟값 모두 0이다.

6. 다음 두 조건 $p : |x - 2| \leq h$, $q : |x + 2| \leq 12$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 h 의 최댓값은? [배점 4, 중중]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$$p : 2 - h \leq x \leq 2 + h, q : -14 \leq x \leq 10$$

$$-14 \leq 2 - h \rightarrow h \leq 16$$

$$2 + h \leq 10 \rightarrow h \leq 8$$

7. 학생 수가 모두 50명인 어느 학급에서 좋아하는 계절을 조사해 보았더니 여름과 겨울을 좋아하는 학생이 각각 42, 28명이었다. 여름과 겨울을 모두 좋아하는 학생 수의 최댓값과 최솟값을 각각 M , m 이라고 할 때, $M + m$ 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $M + m = 48$

해설

전체 학생들의 집합을 U , 여름과 겨울을 좋아하는 학생들의 집합을 각각 A , B 라 하면

$$n(U) = 50, n(A) = 42, n(B) = 28$$

(i) $n(A \cap B) \leq n(A), n(A \cap B) \leq n(B)$ 이므로

$$n(A \cap B) \leq 28 \dots \dots \textcircled{1}$$

(ii) $n(A \cup B) \leq n(U)$ 이므로

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 42 + 28 - n(A \cap B) \leq 50 \end{aligned}$$

$$20 \leq n(A \cap B) \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $20 \leq n(A \cap B) \leq 28$

따라서 여름과 겨울을 모두 좋아하는 학생 수의 최댓값은 28, 최솟값은 20이므로 $M + m = 48$

8. 100가구가 사는 마을에서 A, B, C 의 세 신문을 구독하고 있다. A, B, C 의 신문을 보는 가구 수가 각각 45, 48, 50이고, 세 신문을 모두 보는 가구 수는 5이다. 이때, 한 종류의 신문만을 구독하는 가구 수는?(단, 신문을 보지 않는 가구는 없다.) [배점 4, 중중]

① 33 ② 40 ③ 62 ④ 81 ⑤ 95

해설

마을 전체의 집합을 U , A, B, C 신문을 보는 집합을 각각 A, B, C 라 하면
 $n(A) = 45, n(B) = 48, n(C) = 50$
 $n(A \cap B \cap C) = 5$
 신문을 보지 않는 가구가 없으므로
 $n(A^c \cap B^c \cap C^c) = 0$
 $\therefore n(A \cup B \cup C) = n(U) = 100$
 $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$
 이므로 $n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)$
 $= 45 + 48 + 50 - 100 + 5 = 48$
 따라서 한 종류의 신문만을 구독하는 가구 수는
 $n(U) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + 2n(A \cap B \cap C)$
 $= 100 - 48 + 2 \times 5 = 62$

9. 두 조건 p, q 가 $p : |x| < a, q : |x - 1| \geq 3$ 과 같이 주어져 있다. 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참일 때, 양수 a 의 범위를 구하면? [배점 5, 중상]

① $0 < a \leq 4$ ② $a > 4$ ③ $a \geq 4$
 ④ $a > 2$ ⑤ $2 \leq a \leq 4$

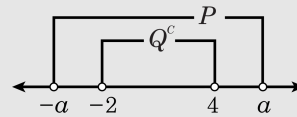
해설

$$\sim p \rightarrow q \Rightarrow \sim q \rightarrow p \Rightarrow Q^c \subset P$$

$$P = \{x | -a < x < a\}$$

$$Q = \{x | x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 4\}$$

$$Q^c = \{x | -2 < x < 4\}$$



$$-a \leq -2 \rightarrow a \geq 2, a \geq 4$$

$$\therefore a \geq 4$$

10. x, y 가 실수이고 A, B, C 를 집합이라 할 때 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요충분조건은? [배점 5, 중상]

- ① $p : x + y \geq 2, q : x \geq 1 \text{ 또는 } y \geq 1$
 ② $p : |x| + |y| = 0, q : 3\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 0$
 ③ $p : xy + 1 > x + y > 2, q : x > 1 \text{ 이고 } y > 1$
 ④ $p : A \subset B \subset C, q : A \subset B \text{ 또는 } A \subset C$
 ⑤ $p : x + y$ 가 유리수이다. $q : x, y$ 모두 유리수이다.

해설

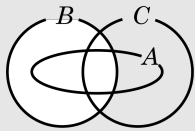
① $x+y \geq 2$ $x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$ (충분조건) (반례 : $x=3, y=-3$)

② $|x|+|y|=0 \Rightarrow \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=0$

여기서 $|x|+|y|=0$ 은 $x=0, y=0$ 과 같으므로
 $x=0, y=0 \rightarrow \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=0$ (충분조건)
 (반례 : $x=8, y=-8$)

③ $xy+1 > x+y > 2 \Leftrightarrow x > 1$ 이고 $y > 1$

④ $A \subset B \cup C \leftarrow A \subset B$ 또는 $A \subset C$ (충분조건)



⑤ $x+y$ 가 유리수이다. $\leftarrow x, y$ 모두 유리수이다.
 (필요조건) (반례 : $x=1+\sqrt{2}, y=1-\sqrt{2}$)

11. 다음 보기 중에서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 몇 개인가? (단 x, y 는 실수이다.)

㉠ $p : -1 < x < 1$ $q : x < 3$

㉡ $p : |x-1|=2$ $q : x^2-2x+3=0$

㉢ $p : x^2+y^2=0$ $q : xy=0$

㉣ $p : A^c \cup B = U$ $q : A \subset B$

㉤ $p : |x|=1$ $q : x=1$

[배점 5, 중상]

㉠ 1개

㉡ 2개

㉢ 3개

㉣ 4개

㉤ 5개

해설

㉠ p 는 q 이기 위한 충분조건만 된다.

㉡ p 는 q 이기 위한 아무 조건도 아니다.

㉢ p 는 q 이기 위한 충분조건만 된다.

㉣ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

즉, $A^c \cup B = U$ 와 $A \subset B$ 은 동치이다.

㉤ p 는 q 이기 위한 필요조건만 된다. $\therefore$ 1개

12. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 $\triangle$ 를
 $A \triangle B = (A \cap B^c)^c$ 로 정의할 때, 다음 중 $(A \triangle B) \triangle B$
 와 같은 것은? [배점 5, 중상]

㉠ $A \cup B$

㉡ $A \cap B$

㉢ $A - B$

㉣ A

㉤ B

해설

$A \triangle B = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$

$\therefore (A \triangle B) \triangle B = (A^c \cup B)^c \cup B = (A \cap B^c) \cup B$
 $= (A \cup B) \cap (B^c \cup B) = A \cup B$

13. 집합 A, B 는 연속된 자연수 6개를 원소로 갖는 집
 합이다. A, B 의 원소의 총합을 $f(A), f(B)$ 라 할때,
 $|f(A) - f(B)|$ 를 구하면? (단, $n(A \cap B) = 3$)

[배점 5, 상하]

㉠ 16

㉡ 17

㉢ 18

㉣ 19

㉤ 20

해설

$A = \{a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5\}$ 라 하면
 $n(A \cap B) = 3$ 이므로
 $B = \{a-3, a-2, a-1, a, a+1, a+2\}$ 라 할 수 있다.
 $f(A) = 6a + 15$, $f(B) = 6a - 3$
 $\therefore |f(A) - f(B)| = |6a + 15 - 6a + 3| = 18$

14. 집합 $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ 의 부분집합의 열을 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{16}$ 이라 하고, B_1 의 원소의 총합을 a_1 , B_2 의 원소의 총합을 $a_2, \dots, B_{16}$ 의 원소의 총합을 a_{16} 이라 할 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{16}$ 의 값은?
 [배점 5, 상하]

- ① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

해설

집합 $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ 의 부분집합의 개수는 모두 16개인데 실제로 나열해 보지 않고서도 해결할 수 있다.
 즉, -1 을 반드시 포함하는 경우의 집합은 8개
 0 을 반드시 포함하는 경우의 집합은 8개
 1 을 반드시 포함하는 경우의 집합은 8개
 2 를 반드시 포함하는 경우의 집합은 8개이므로
 원소의 총합은
 $8(-1 + 0 + 1 + 2) = 16$

15. 실수 전체의 두 부분 집합 A, B 가 두 조건

- $1 \in A$
 · $x \in A$ 이면 $x+1 \in A$ 이고 $x-1 \in B$

를 만족할 때, 다음 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ A 는 모든 자연수를 원소로 갖는다.
 ㉡ A 의 원소는 모두 B 의 원소이다.
 ㉢ B 는 최대 원소를 갖는다.
 ㉣ B 는 정수 전체 집합의 부분집합이다.

[배점 5, 상하]

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉡, ㉢
 ③ ㉠, ㉡, ㉣ ④ ㉠, ㉢, ㉣
 ⑤ ㉠, ㉡, ㉣, ㉣

해설

㉠ $x \in A$ 이면 $x+1 \in A$ 이고 $1 \in A$ 이므로
 $1+1=2 \in A, 2+1=3 \in A, \dots$
 $\therefore A \supset \{1, 2, 3, \dots\}$ (참)
 ㉡ $x \in A \rightarrow x+1 \in A \rightarrow (x+1)-1 \in B$
 $\therefore x \in A \rightarrow x \in B$ (참)
 ㉢ $B \supset \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ 따라서 B 는 무한 집합이므로 최대 원소는 없다.
 ㉣ $\frac{1}{2} \in A$ 이면 B 에는 정수가 아닌 원소가 들어 있게 되므로 거짓이다. (조건에서 $1 \in A$ 라고 해서 1이외의 수가 A 의 원소가 될 수 없다는 의미는 아니다.)