실력확인문제

1. 다음 중 부등식 $x^2+6x-y+5>0$ 의 영역 안에 있는 점은? [배점 2, 하하]

① $(-5,\ 2)$ ② $(-4,\ 0)$

③ $(-3,\ -3)$ ④ $(-1,\ 2)$

⑤ $(1,\ 3)$

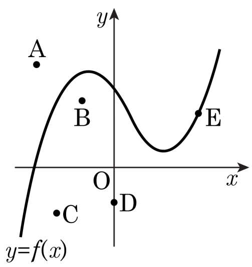
해설

각각의 점의 좌표를 대입해 본다.

⑤ $x=1,\ y=3$ 을 대입하면

$1+6-3+5=9>0$ 으로 성립한다.

2. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 곡선 $y=f(x)$ 와 다섯 개의 점 $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ 가 있다. 이들 점 중에서 부등식 $y \le f(x)$ 를 만족하는 영역에 속하는 점의 개수는?



[배점 2, 하하]

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개

④ 4 개 ⑤ 5 개

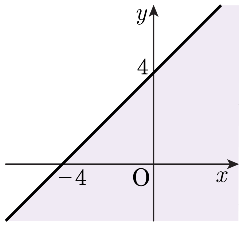
해설

부등식 $y \le f(x)$ 를 만족하는 영역은

곡선 $y=f(x)$ 의 아랫부분(경계선 포함)이므로

이 영역에 속하는 점은 점 $B,\ C,\ D,\ E$ 로 4 개이다.

3. 다음 어두운 부분을 부등식으로 나타낸 것을 찾으면? (단, 경계는 포함) [배점 2, 하하]



① $y \le x+4$

② $y < x+4$

③ $y \ge x+4$

④ $y > x+4$

⑤ $y = x+4$

해설

주어진 영역의 경계를 나타내는 직선의 방정식은

$y=x+4$이고

어두운 부분은 $(0,\ 0)$을 포함하므로,

$0 \le 0+4$이다.

따라서 직선의 아래쪽을 나타내므로,

$y \le x+4$

4. x 가 10 보다 작은 자연수이고 $y=x-5$ 일 때, y 의최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M-m$ 의 값은? [배점 2, 하중]

① 0 ② 4 ③ -4 ④ 8 ⑤ 10

해설

x 가 10 보다 작은 자연수이므로

x 가 1 부터 9 까지의 자연수이다.

따라서 $x=9$ 일 때,

$y=x-5$ 의 최댓값은 4 이므로 $M=4$

$x=1$ 일 때,

$y=x-5$ 의 최솟값은 -4 이므로 $m=-4$

따라서 $M-m=8$

5. 두 점 $A(1,\ 2)$, $B(-1,\ -4)$ 에 대하여 직선 AB 의 윗부분(경계선 제외)을 나타내는 부등식은? [배점 2, 하중]

① $y < -3x+1$　② $y > -3x+1$

③ $y < 3x-1$　④ $y > 3x-1$

⑤ $y > 3x+1$

해설

두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(-1,\ -4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$y-2 = \dfrac{-4-2}{-1-1}(x-1)$

$\therefore\ y = 3x-1$

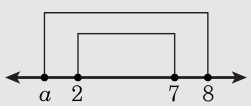
따라서 이 직선의 윗부분(경계선 제외)의 영역을 나타내는 부등식은 $y > 3x-1$

6. $2 \le x \le 7$ 이 $a \le x \le 8$ 이기 위한 충분조건 일 때, 상수 a 의 최댓값은? [배점 2, 하중]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$2 \le x \le 7$ 이 $a \le x \le 8$ 이기 위한 충분조건이므로, $\{x \mid 2 \le x \le 7\} \subset \{x \mid a \le x \le 8\}$ 이 성립하여야 한다.



$\therefore\ a \le 2$

그러므로 a 의 최댓값은 2 이다.

7. 점 $(k, 2)$ 가 직선 $x+y-5=0$ 의 윗부분(경계선 제외)에 있을 때 k 값의 범위를 구하면? [배점 3, 하상]

① $k > 2$　② $k > 3$　③ $k > 4$

④ $k > 6$　⑤ $k > 7$

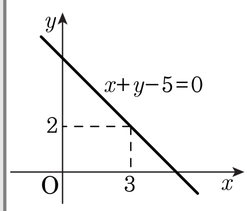
해설

$(k, 2)$ 가 $x+y-5=0$ 을 지날 때를 구해보면,

$\therefore\ k+2-5=0,\quad k=3$

위쪽에 있으려면

$\therefore\ k > 3$



8. 점 $(a,\ 3)$ 이 곡선 $y = x^2+2x$ 의 윗 부분에 있도록 하는 정수 a 의 개수는? [배점 3, 하상]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

곡선 $y = x^2+2x$ 의 윗부분을 나타내는 부등식을 $y > x^2+2x$ 점$(a,\ 3)$ 이

이 부등식의 영역에 포함되므로

$3 > a^2+2a$,

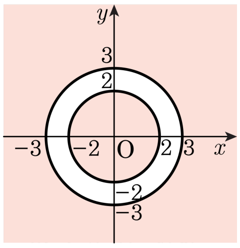
$(a-1)(a+3) < 0$

$-3 < a < 1$ 이므로

만족하는 정수는 $-2, -1, 0$

$\therefore$ 3 개

9. 다음 그림의 색칠한 부분을 부등식으로 나타내면? (단, 경계선은 포함한다.)



[배점 3, 하상]

① $(x^2+y^2-2)(x^2+y^2-3) \le 0$

② $(x^2+y^2-2)(x^2+y^2-3) \ge 0$

③ $(x^2+y^2+4)(x^2+y^2+9) \le 0$

④ $(x^2+y^2-4)(x^2+y^2-9) \le 0$

⑤ $(x^2+y^2-4)(x^2+y^2-9) \ge 0$

해설

주어진 그림에서 영역의 경계선을 나타내는 방정식은

$x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=9$

즉, $x^2+y^2-4=0,\ x^2+y^2-9=0$ 이므로 색칠된 부분을

$(x^2+y^2-4)(x^2+y^2-9) \ge 0,\ (x^2+y^2-4)(x^2+y^2-9) \le 0$ 중 어느 하나의 영역이다.

이때, $f(x,\ y) = (x^2+y^2-4)(x^2+y^2-9)$ 라 하고,

색칠된 부분에 있는 점 $(0,\ 0)$ 의 좌표를 대입하면

$f(0,\ 0) = (-4)\cdot(-9) = 36 \ge 0$

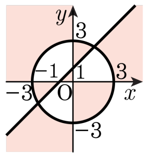
따라서, 구하는 부등식은

$(x^2+y^2-4)(x^2+y^2-9) \ge 0$

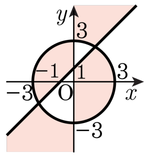
10. 부등식의 영역 $xy(x-y+1)(x^2+y^2-9) > 0$ 을 만족하는 $(x,\ y)$ 의 영역을 그림으로 옳게 나타낸 것은?

[배점 3, 하상]

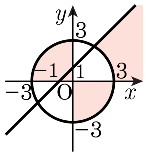
①



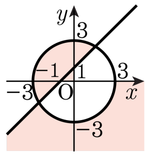
②



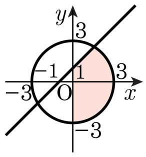
③



④



⑤



해설

경계선 위에 있지 않은 임의의 점을 부등식 $xy(x-y+1)(x^2+y^2-9) > 0$ 에 대입해보면 구하는 영역은 ①번과 같다.

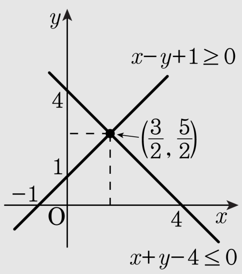
11. 연립부등식 $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x+y-4 \le 0 \\ x-y+1 \ge 0 \end{cases}$ 이 나타내는 영역의 넓이를 구하면?

[배점 3, 하상]

① $\dfrac{19}{6}$ ② 4 ③ $\dfrac{21}{4}$ ④ 5 ⑤ $\dfrac{23}{4}$

해설

x 축 y 축과 직선 $x+y-4=0$ 이 만나서 만드는 큰 삼각형에서 y 축, $x+y-4=0$, $x-y+1$ 이 만나서 만드는 작은 삼각형의 넓이를 빼면 된다. 큰 삼각형의 넓이 8 , 작은 삼각형의 넓이 $\frac{9}{4}$ 따라서 구하는 영역의 넓이는 $\frac{23}{4}$



12. 두 부등식 $xy \geq 0$, $|\,x\,|+|\,y\,| \leq 4$ 을 동시에 만족시키는 영역의 넓이는? [배점 3, 중하]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

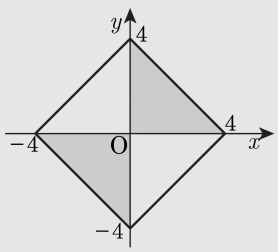
해설

$xy \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq 0,\ y \geq 0$ 또는 $x \leq 0,\ y \leq 0$ 에서, 제1사분면 또는 제3사분면 $\cdots$ ㉠

$|\,x\,|+|\,y\,| \leq 4 \;\Rightarrow |\,x\,|+|\,y\,|=4$ 가 나타내는 마름모의 내부 $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서,

$\therefore$ (넓이)$=2\times\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\right)=16$



13. 좌표평면 위에서 점 $(k,\ 5)$ 가 포물선 $y=x^2+2x+3$ 의 위쪽 부분(경계포함)에 있을 때, k 가 취할 수 있는 값의 범위는? [배점 3, 중하]

① $-1-\sqrt{3} \leq k \leq -1+\sqrt{3}$

② $k \geq -1+\sqrt{3}$ 또는 $k \leq -1-\sqrt{3}$

③ $\sqrt{3}-1 \leq k \leq \sqrt{3}+1$

④ $k \geq \sqrt{3}+1$ 또는 $k \leq \sqrt{3}-1$

⑤ $1-\sqrt{3} \leq k \leq 1+\sqrt{3}$

해설

포물선 $y=x^2+2x+3$ 의 위쪽 부분 (경계 포함)인 영역을 나타내는
부등식은 $y \geq x^2+2x+3$
점$(k,\ 5)$ 가 이 영역 내에 있을 때는
$5 \geq k^2+2k+3,\ \ k^2+2k-2 \leq 0$
$\therefore\ -1-\sqrt{3} \leq k \leq -1+\sqrt{3}$

14. $|\,x-2\,|+|\,y\,| \leq 2$ 을 만족하는 영역 D 를 좌표평면 위에 나타내고 그 영역의 넓이를 구하여라. 또 이 영역 D 를 만족하는 점 (x, y) 에 대하여 $x-2y$ 의 최솟값을 구하면? [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 넓이$=8$

▷ 정답 : 최솟값$=-2$

해설

$|\,x-2\,|+|\,y\,|\leq 2$ 의 영역은

$\mathrm{i}\,)x\geq 2, y\geq 0$ 일 때는 $x+y\leq 4$

$\mathrm{ii}\,)x\leq 2, y\geq 0$ 일 때는 $y\leq x$

$\mathrm{iii})x\geq 2, y<0$ 이면 $x-y\leq 4$

$\mathrm{iv}\,)x\leq 2, y<0$ 이면 $y\geq -x$

색칠한 부분의 넓이는

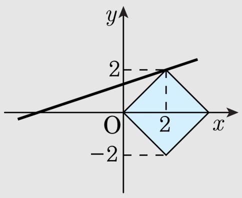
$\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$

$x-2y=k$ 라 하면,

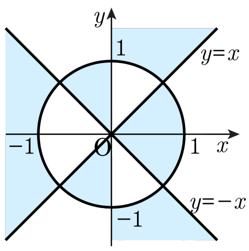
직선이 $(2,2)$ 를 지날 때

k는 최소가 된다.

$\therefore\quad 2-2\times 2=-2 \Rightarrow$ 최솟값 : -2



15. 다음 그림에서 빗금 친 부분의 영역을 부등식으로 나타낸 것은?



[배점 3, 중하]

① $xy(x^2-y^2)(x^2+y^2-1)\leq 0$

② $xy(x^2-y^2)(x^2+y^2-1)\geq 0$

③ $x(x^2-y^2)(x^2+y^2-1)\geq 0$

④ $x(x^2-y^2)(x^2+y^2-1)\leq 0$

⑤ $y(x^2-y^2)(x^2+y^2-1)\geq 0$

해설

그림에서 영역의 기준이 되는 선은 y 축,

원 $x^2+y^2=1$, $y=x$, $y=-x$ 이다.

경계에 포함되지 않는 임의의 점을 식에 대입해보면, 구하는 부등식이

$x(x^2-y^2)(x^2+y^2-1)\leq 0$ 임을 알 수 있다.

16. $2\leq x\leq 4,\ y\geq 1,\ y\leq -x+7$ 의 공통 부분 위에서, $3x+2y$ 의 최솟값은? [배점 3, 중하]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

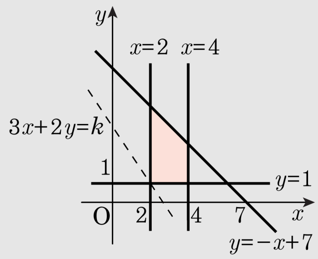
해설

$3x+2y=k$ ······㉠로 놓으면

$y=-\frac{3}{2}x+\frac{k}{2}$

$\therefore$ k 의 값이 작아질수록 직선 ㉠은 아래쪽으로 평행이동한다.

$\therefore$ 직선 ㉠이 점 $(2, 1)$을 지날 때 k 는 최소가 되고, 최솟값은 $k=3\cdot 2+2\cdot 1=8$



17. 세 부등식 $x\geq 0,\ y\geq 0,\ y\leq -|x-1|+2$ 를 동시에 만족하는 $x,\ y$에 대하여 $x-2y$의 최댓값 M과 최솟값 m은? [배점 4, 중중]

① $M=2,\quad m=-2$ ② $M=2,\quad m=-3$

③ $M=3,\quad m=-3$ ④ $M=3,\quad m=-2$

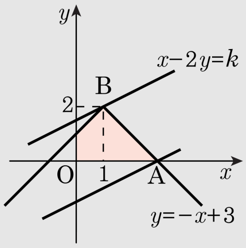
⑤ $M=5,\quad m=-3$

해설

$x-2y=k$ 로 놓으면

$y=\frac{1}{2}x-\frac{k}{2}\cdots\cdots$ ㉠

k 의 값이 커질수록 직선 ㉠은 아래쪽으로 내려간다.



$\therefore$ 직선 ㉠이 점 $A(3,\ 0)$ 를 지날 때

최댓값 $\mathrm{M}=3-2\cdot 0=3$

직선 ㉠이 점 $B(1,\ 2)$ 를 지날 때

최솟값 $m=1-2\cdot 2=-3$

18. $x,\ y$가 $x^2+y^2\le 5$를 만족시킬 때, $2x+y$의 최댓값과 최솟값의 차를 구하면? [배점 4, 중중]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$2x+y=k$라 놓으면

$y=-2x+k$

$\frac{|-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}\le\sqrt{5},\ |-k|\le 5$

$\therefore -5\le k\le 5$

(원 $x^2+y^2=5$와 직선 $2x+y=k$가 만나면 되므로 원의 중심 $(0,0)$에서 직선$2x+y-k=0$까지 이르는 거리가 반지름 보다 같거나 작다를 이용한다.)

19. 좌표평면에서 직선 $ax-y+2a=0$이 두 점 $\mathrm{P}(-1,\ 3),\ \mathrm{Q}(4,\ -2)$사이를 지나도록 하는 정수 a의 개수는? [배점 4, 중중]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선 $ax-y+2a=0$은 $y=a(x+2)$이며, 정점 $(-2,0)$을 지난다.

두 점 $\mathrm{P}(-1,\ 3),\ \mathrm{Q}(4,\ -2)$사이를 지나려면

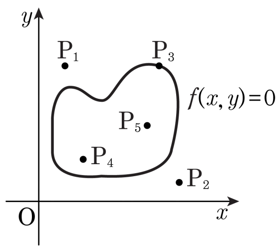
정점 $(-2,\ 0)$과 점 P를 지날 때의 직선과

정점 $(-2,0)$과 점 Q를 지날 때의 직선사이를 지나면 된다.

따라서 $y=3x+6$과 $y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$사이를 지나면 된다.

정수 a의 개수는 $0,\ 1,\ 2,\ 3$의 4개이다.

20. 다음 그림과 같은 도형의 방정식 $f(x,\ y)=0$에 대하여 두 점 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1),\ \mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$는 도형 외부의 점이고, 점 $\mathrm{P}_3(x_3,\ y_3)$은 도형 위의 점이며, 두 점 $\mathrm{P}_4(x_4,\ y_4),\ \mathrm{P}_5(x_5,\ y_5)$는 도형 내부의 점이다. 다음 중 옳은 것을 고르면?



[배점 4, 중중]

① $f(x_1,y_1)\cdot f(x_2,y_2)<0$

② $f(x_1,y_1)\cdot f(x_3,y_3)<0$

③ $f(x_1,y_1)\cdot f(x_4,y_4)=0$

④ $f(x_2,y_2)\cdot f(x_4,y_4)>0$

⑤ $f(x_4,y_4)\cdot f(x_5,y_5)>0$

해설

$f(x_1,\ y_1) > 0$

$f(x_2,\ y_2) > 0$

$f(x_3,\ y_3) = 0$

$f(x_4,\ y_4) < 0$

$f(x_5,\ y_5) < 5$

$\mathrm{P}_4(x_4,\ y_4),\ \mathrm{P}_5(x_5,\ y_5)$ 는 도형 내부의 점이므로

$f(x_4,\ y_4) \cdot f(x_5,\ y_5) > 0$