문제 풀이 과제

1. $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\}$, $B = \{x \mid x$는 11보다 작은 홀수$\}$ 일 때, $n(A) + n(B)$ 의 값은? [배점 3, 하상]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

$B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ 이므로 $n(B) = 5$

$\therefore\ n(A) + n(B) = 7 + 5 = 12$

2. 두 집합 $A = \{6,\ a-2,\ 2\}$, $B = \{a,\ 4,\ 2\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 일 때, a 의 값으로 옳은 것은? [배점 3, 하상]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$A = B$ 이므로 $a - 2 = 4$, $a = 6$

$\therefore\ a = 6$

3. 10 의 약수의 집합을 A, 12 의 약수의 집합을 B 라고 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2 개) [배점 3, 하상]

① $10 \in A$ ② $12 \in A$ ③ $14 \notin B$

④ $8 \in B$ ⑤ $6 \notin B$

해설

$A = \{1, 2, 5, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로

$10 \in A$, $14 \notin B$ 이다.

4. 두 집합 A, B 가 다음과 같을 때, $n(A)+n(B)$ 의 값을 구하여라.

$A = \{x|x$는 20의 약수$\}$, $B = \{x|x$는 $0 < x < 110$인 5의 배수$\}$

[배점 3, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: 27

해설

$A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, $B = \{5, 10, 15, 20, \cdots, 105\}$ 이므로

$n(A) = 6,\ n(B) = 21$

$\therefore n(A) + n(B) = 27$

5. 집합 $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ 에서 2 를 포함한 부분집합의 개수가 8 개라고 할 때, 자연수 n 의 값은? [배점 3, 중하]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$2^{(2\text{를 제외한 원소의 개수})} = 2^{n-1} = 8 = 2^3 \quad \therefore n = 4$

6. 다음 집합 중에서 조건제시법을 원소나열법으로, 원소나열법을 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은? (정답 2 개) [배점 3, 중하]

① $A = \{x \mid x$는 홀수$\} = \{1, 3, 6, \cdots\}$

② $A = \{x \mid x$는 10의 약수$\} = \{1, 2, 4, 8 \cdots\}$

③ $\{x \mid x$는 30보다 작은 소수$\} = \{2, 3, 5, 7, \cdots, 23, 29\}$

④ $\{3, 6, 9, 12\} = \{x \mid x$는 10 이하의 3의 배수$\}$

⑤ $\{1, 3, 5, 7, \cdots, 99\} = \{x \mid x$는 100 이하의 홀수$\}$

해설

① $\{1, 3, 5 \cdots\}$
② $\{1, 2, 5, 10\}$
④ $\{x \mid x$는 12 이하의 3의 배수$\}$

7. 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 2 개인 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 6 개

해설

구하고자 하는 부분집합은, $\{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ 이다.

8. 집합 $A = \{x \mid x$는 10의 약수$\}$ 일 때, $n(A) = a$, 집합 A 의 부분집합의 개수를 b개라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$A = \{1, 2, 5, 10\}$ 이므로 $a = n(A) = 4$ 이다.
$b = (A$의 부분집합의 개수$) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$
$\therefore\ a + b = 4 + 16 = 20$

9. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 12의 약수$\}$, $B = \{1, 2, 12, a - 3, b + 3, 4\}$ 가 서로 같을 때, $a \div b$ 의 값을 구하여라. (단, $b > 0$) [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,
$B = \{1, 2, 4, 12, a - 3, b + 3\}$ 이므로,
$a - 3 = 3,\ b + 3 = 6$ 또는 $a - 3 = 6,\ b + 3 = 3$ 이어야 한다.
하지만 조건에서 $b > 0$ 이라 했으므로 $a - 3 = 3,\ b + 3 = 6$ 이다.
따라서 $a = 6,\ b = 3$ 이고, $a \div b = 2$ 이다.

10. 두 집합 $A=\{6,\ a,\ 3,\ b,\ 2\}$, $B=\{5,\ c,\ 3,\ d,\ 7\}$ 이 서로 같을 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 20

해설

$A=B$ 이므로

$\{6,\ a,\ 3,\ b,\ 2\}=\{5,\ c,\ 3,\ d,\ 7\}$

이 중 3 은 공통이므로 제외하면

$a=5,\ b=7$ 또는 $a=7,\ b=5$

따라서 $a+b=12$

$c=2,\ d=6$ 또는 $c=6,\ d=2$

따라서 $c+d=8$

$\therefore a+b+c+d=20$

11. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7\}$ 의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구하여라.

[배점 4, 중중]

① 12 개 ② 24 개 ③ 28 개

④ 32 개 ⑤ 64 개

해설

집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^5=32$ (개) 이고, 이 중에서 홀수를 원소로 하나도 갖지 않는 부분집합은 원소 2, 4 로 만든 부분집합이므로 $2^2=4$ (개) 이다.

$\therefore\ 32-4=28$ (개)

12. 집합 $A=\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, n 을 모두 포함하는 부분집합의 개수가 32 개일 때, n 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

집합 A 의 원소의 개수를 a 개라 하면 원소 1, n을 모두 포함하는 부분집합의 개수는 2^{a-2} 개이다.

$2^{a-2}=32=2^5$

$a-2=5$ 이므로 $a=7$

따라서 집합 A 의 원소의 개수가 7 개이므로 n 의 값은 13 이다.

13. 세 집합 A, B, C 에 대해서 $A\subset B$ 이고 $B\subset C$ 의 포함 관계를 가질 때, 다음 중 $A=B=C$ 가 되지 않는 경우를 모두 고른 것은?

보기

㉠ $A\subset C$ ㉡ $A=C$

㉢ $C\subset A$ ㉣ $A=B$

[배점 5, 중상]

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣

③ ㉠, ㉡, ㉢ ④ ㉠, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $A \subset B$ 이고 $B \subset C$ 이므로, $A = B = C$ 가 아니어도 항상 $A \subset C$ 이다.

㉡ $A = B \subset C$ 일 때, $C \subset B$ 인지 알 수 없으므로 $A = B = C$ 가 아니다.

14. 집합 $A = \{1, 2\}$ 에 대하여 집합 B 는 집합 A 의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합일 때, 집합 B 의 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 16 개

해설

집합 A 의 부분집합의 개수는
$2^2 = 4$ (개) 이므로 $n(B) = 4$ 이다.
따라서 집합 B 의 부분집합의 개수는
$2^{n(B)} = 2^4 = 16$ (개) 이다.

15. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 n의 약수$\}$, $B = \{x \mid x$는 54의 약수$\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $A \neq B$ 이기 위한 자연수 n 의 값은 모두 몇 개인지 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 7 개

해설

n 은 54 를 뺀 54 의 약수이므로 $1, 2, 3, 6, 9, 18, 27$ 이다. 따라서 7 개이다.

16. 다음을 만족하는 집합을 조건제시법으로 알맞게 나타내지 않은 것을 고르면?

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어져있다. 원소들은 각각 2 개의 약수만을 가진 수이다. 원소는 10 미만의 자연수이다.

[배점 5, 중상]

① $\{x \mid x$는 7 미만의 소수$\}$

② $\{x \mid x$는 7 이하의 소수$\}$

③ $\{x \mid x$는 9 미만의 소수$\}$

④ $\{x \mid x$는 9 이하의 소수$\}$

⑤ $\{x \mid x$는 10 미만의 소수$\}$

해설

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어진 집합이므로 원소의 개수는 4 개임을 알 수 있다.
원소들은 각각 2 개의 약수만을 가지므로 소수임을 알 수 있다.
원소는 10 미만의 소수이므로 $\{2, 3, 5, 7\}$ 임을 알 수 있다.
① $\{x \mid x$는 7 미만의 소수$\} = \{2, 3, 5\}$
② $\{x \mid x$는 7 이하의 소수$\} = \{2, 3, 5, 7\}$
③ $\{x \mid x$는 9 미만의 소수$\} = \{2, 3, 5, 7\}$
④ $\{x \mid x$는 9 이하의 소수$\} = \{2, 3, 5, 7\}$
⑤ $\{x \mid x$는 10 미만의 소수$\} = \{2, 3, 5, 7\}$

17. 집합 $A = \{1,\ 2,\ \varnothing,\ \{1,\ 2\}\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은? [배점 5, 상하]

① $\{1,\ 2\} \notin A$ ② $\varnothing \subset A$

③ $\varnothing \in A$ ④ $A \subset A$

⑤ $1 \in A$

해설

① $\{1,\ 2\} \in A$

18. 집합 $A_N = \{x | x$ 는 N 의 약수$\}$로 정의한다. A_N 의 진부분집합의 개수가 7 개일 때, N 의 최솟값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

A_N 의 진부분집합의 개수가 7 개라면,
A_N 의 부분집합의 개수는 8 개이다.
원소의 개수가 n 개인 부분집합의 개수$=2^n$
집합 A_N 의 원소의 개수는 3 개이다.
N 의 약수의 개수가 3 개가 되려면 N 은 소수의 제곱수이어야 한다.
따라서 가장 작은 소수인 2 의 제곱수인 4 가 N 의 최솟값이다.

19. 집합 $S = \{x \mid x < 9, x$는 자연수$\}$의 부분집합 $A = \{x \mid x \in A$이면 $12 - x \in A\}$가 있다. 집합 A 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답: 개

▷ 정답: 7 개

해설

$A = \{x \mid x \in A$이면 $12 - x \in A\}$라는 조건을 보면,
집합 A 는 더해서 12 가 되는 두 개의 자연수를 원소로 가진다.
9 보다 작은 수 중에 더해서 12 가 되는 수의 쌍은 $(4, 8),\ (5, 7),\ (6, 6)$ 이다.
따라서 집합 A 가 될 수 있는 집합은
$\{6\}, \{4, 8\}, \{5, 7\}, \{4, 6, 8\}, \{5, 6, 7\}, \{4, 5, 7, 8\}, \{4, 5, 6, 7, 8\}$ 로 7 개이다.

20. 집합 $S = \{a,\ \{a\},\ \{a,\ b\},\ b,\ \{c\},\ c,\ d\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것만 골라라.

㉠ $\{a\} \subset S$

㉡ $\{b\} \in S$

㉢ $\{b,\ c,\ d\} \in S$

㉣ $c \in S,\ d \in S$

㉤ $\{c,\ d\} \subset S$

㉥ $S \subset \{a,\ b,\ c,\ d\}$

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

▷ 정답 : ㉤

해설

집합 S 는 집합 안에 또 다른 집합을 원소로 가진 집합이다. 따라서 집합 S 의 원소는
$\{a,\ \{a\},\ \{a,\ b\},\ b,\ \{c\},\ c,\ d\}$ 가 된다.
㉠ $\{a\} \subset S \rightarrow \{a\}$ 는 집합 S 의 원소이므로 옳다.
㉡ $\{b\} \in S \rightarrow b$ 는 집합 S 의 원소이지만 $\{b\}$ 는 집합 S 의 원소가 아니다.
㉢ $\{b,c,d\} \in S \rightarrow b,c,d$ 는 모두 집합 S 의 원소이므로 $\{b,c,d\} \subset S$ 가 되어야 한다.
㉣ $c \in S, d \in S \rightarrow c,d$ 는 집합 S 의 원소이므로 옳다.
㉤ $\{c,d\} \subset S \rightarrow c,d$ 는 집합 S 의 원소이고 $\{c,d\}$ 는 집합 S 의 부분집합이 되므로 옳다.
㉥ $S \subset \{a,\ b,\ c,\ d\} \rightarrow$ 집합 S 는 $\{a,b,c,d\}$ 의 부분집합이 될 수 없다.
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉣, ㉤이다.

21. 집합 $A = \{x \mid x$는 12의 약수$\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라.

(1) $B \subset A$
(2) B 의 원소의 개수는 3 개 이하이다.

[배점 6, 상중]

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 42 개

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$
원소의 개수가 3 이하인 집합 A 의 부분집합은 다음과 같다.
원소가 0 개인 부분집합 : $\varnothing$
원소가 1 개인 부분집합 :
$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{6\},\ \{12\}$
원소가 2 개인 부분집합 :
$\{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{1,\ 4\},\ \{1,\ 6\},\ \{1,\ 12\},$
$\{2,\ 3\},\ \{2,\ 4\},\ \{2,\ 6\},\ \{2,\ 12\},\ \{3,\ 4\},$
$\{3,\ 6\},\ \{3,\ 12\},\ \{4,\ 6\},\ \{4,\ 12\},\ \{6,\ 12\}$
원소가 3 개인 부분집합 :
$\{1,\ 2,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 4\},\ \{1,\ 2,\ 6\},\ \{1,\ 2,\ 12\},$
$\{1,\ 3,\ 4\},\ \{1,\ 3,\ 6\},\ \{1,\ 3,\ 12\},\ \{1,\ 4,\ 6\},$
$\{1,\ 4,\ 12\},\ \{1,\ 6,\ 12\},\ \{2,\ 3,\ 4\},\{2,\ 3,\ 6\},$
$\{2,\ 3,\ 12\},\{2,\ 4,\ 6\},\{2,\ 4,\ 12\},\{2,\ 6,\ 12\},$
$\{3,\ 4,\ 6\},\{3,\ 4,\ 12\},\{3,\ 6,\ 12\},\{4,\ 6,\ 12\}$

22. 집합 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2m-1\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1 과 3 은 반드시 포함하고 5 와 $2m-1$ 은 포함하지 않는 부분집합의 개수가 32 개일 때 자연수 m 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2m-1\} \rightarrow\ n(A) = m$ (개)

원소 1 과 3 은 반드시 포함하고 5 와 $2m-1$ 은 반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수가 32 개이므로

$2^{m-2-2} = 32$, $m-4 = 5$

$m = 9$

23. 집합 $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중, 두 번째로 작은 원소가 5 인 부분집합의 개수를 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중, 두 번째로 작은 원소가 5 인 부분집합을 찾으려면,

5 는 반드시 포함되고 $1, 2, 3$ 중에 하나만 포함되어야 한다.

(1) 1 과 5 는 포함되고, $2, 3$ 은 포함되지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-2} = 4$ (개)

(2) 2 와 5 는 포함되고, $1, 3$ 은 포함되지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-2} = 4$ (개)

(3) 3 과 5 는 포함되고, $1, 2$ 는 포함되지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-2} = 4$ (개)

따라서 $4 + 4 + 4 = 12$ (개)

24. 집합 $S = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합 A 가 다음과 같은 조건을 만족할 때, 집합 A 의 개수를 구하여라.

• $x \in A$ 이면 $-x \in A$

[배점 6, 상중]

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 7 개

해설

주어진 집합은 절댓값이 같은 두 원소가 반드시 함께 A 의 원소이어야 한다.

(1) 원소의 개수가 1 개인 집합 : $\{0\} \Rightarrow 1$ 개

(2) 원소의 개수가 2 개인 집합 : $\{-2, 2\}, \{-1, 1\} \Rightarrow 2$ 개

(3) 원소의 개수가 3 개인 집합 : $\{-2, 0, 2\}, \{-1, 0, 1\} \Rightarrow 2$ 개

(4) 원소의 개수가 4 개인 집합 : $\{-2, -1, 1, 2\} \Rightarrow 1$ 개

(5) 원소의 개수가 5 개인 집합 : $\{-2, -1, 0, 1, 2\} \Rightarrow 1$ 개

따라서 집합 A 의 개수는 $1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 7$ (개)