단원 종합 평가

1. n이 자연수이고 $1 < n < 30$ 일 때, $\sqrt{4n}$ 이 자연수가 되도록 하는 n 의 개수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

4 개

해설

$4n = 2^2 \times n$ 이므로 $n = 2^2,\ 3^2,\ 2^4,\ 5^2,\ 2^2 \times 3^2 \cdots$ 이 있다.

$1 < n < 30$ 라고 하였으므로, $n = 2^2,\ 3^2,\ 2^4,\ 5^2$ 4개이다.

2. 다음 보기 중 두 수의 대소 관계가 옳은 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $\sqrt{11} - 2 > -2 + \sqrt{10}$

㉡ $\sqrt{20} - 4 > 1$

㉢ $\sqrt{15} - \sqrt{17} > -\sqrt{17} + 4$

㉣ $2 - \sqrt{3} < \sqrt{5} - \sqrt{3}$

㉤ $-\sqrt{7} - \sqrt{2} > -\sqrt{7} - 1$

㉥ $\dfrac{1}{2} - \sqrt{5} < -\sqrt{5} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 답 :

㉠

㉣

해설

㉡ $\sqrt{20} - 4 - 1 = \sqrt{20} - 5 = \sqrt{20} - \sqrt{25} < 0$

$\therefore\ \sqrt{20} - 4 < 1$

㉢ $\sqrt{15} - \sqrt{17} - (-\sqrt{17} + 4) = \sqrt{15} - 4$
$= \sqrt{15} - \sqrt{16} < 0$

$\therefore\ \sqrt{15} - \sqrt{17} < -\sqrt{17} + 4$

㉤ $-\sqrt{7} - \sqrt{2} - (-\sqrt{7} - 1) = -\sqrt{2} + 1$
$= -\sqrt{2} + 1 < 0$

$\therefore\ -\sqrt{7} - \sqrt{2} < -\sqrt{7} - 1$

㉥ $\dfrac{1}{2} - \sqrt{5} - \left(-\sqrt{5} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}$
$= \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4} > 0$

$\therefore\ \dfrac{1}{2} - \sqrt{5} > -\sqrt{5} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

3. $\sqrt{3} \fallingdotseq 1.73$ 일 때, $\dfrac{3}{\sqrt{3}} - 10\sqrt{0.03} + \sqrt{12}$ 의 근삿값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

3.46

해설

$\dfrac{3}{\sqrt{3}} - 10\sqrt{0.03} + \sqrt{12}$

$= \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} - 10\sqrt{\dfrac{3}{100}} + 2\sqrt{3}$

$= \dfrac{3\sqrt{3}}{3} - \dfrac{10\sqrt{3}}{10} + 2\sqrt{3}$

$= \sqrt{3} - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3} \fallingdotseq 2 \times 1.73 = 3.46$

4. 등식 $5+3\sqrt{2}+3x-y=2\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-3$ 을 만족하는 유리수 $x,\ y$ 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 답 :

$x=-11$

$y=-25$

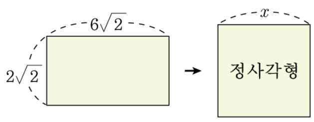
해설

$5+3\sqrt{2}+3x-y=2\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-3$

$(5+3x-y+3)+(3-2x+y)\sqrt{2}=0$

$$\begin{array}{rl} & 3x-y=-8 \\ +) & \underline{-2x+y=-3} \\ & x\quad =-11 \quad y=-25 \end{array}$$

5. 가로의 길이가 $6\sqrt{2}$ 이고, 세로의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 직사각형과 넓이가 같은 정사각형의 한 변의 길이 x 를 $a\sqrt{b}$ 의 꼴로 나타내어라. (단, b 는 제곱인 인수가 없는 자연수)



[배점 3, 중하]

▶ 답 :

$2\sqrt{6}$

해설

직사각형의 넓이는 $6\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=24$ 이다.
따라서 $x^2=24$ 이므로 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ 이다.

6. 다음 중 옳은 것은? [배점 4, 중중]

① $\sqrt{2}$ 와 $\sqrt{3}$ 사이에는 무리수가 없다.

② $\dfrac{1}{2}$ 와 $\dfrac{1}{3}$ 사이에는 1 개의 유리수가 있다.

③ $-\dfrac{5}{2}$ 와 $\sqrt{3}$ 사이에는 5 개의 정수가 있다

④ 모든 실수는 수직선 위에 나타낼 수 있다.

⑤ 수직선 위에는 무리수에 대응하는 점이 없다.

해설

③ $1<\sqrt{3}<2$ 이므로 $-\dfrac{5}{2}$ 와 $\sqrt{3}$ 사이에는 $-2,-1,0,1$ 총 4 개의 정수가 있다.

7. 다음과 같이 옳은 것은 ○ 표, 옳지 않은 것은 × 표를 하였다. 바르게 표시되지 <u>않은</u> 것끼리 짝지어진 것은?

(ㄱ) 0 의 제곱근은 없다. $\cdots$ (×)

(ㄴ) -4 의 제곱근은 -2 이다. $\cdots$ (○)

(ㄷ) 양수의 제곱근은 2 개이다. $\cdots$ (○)

(ㄹ) 음수의 제곱근은 1 개이다. $\cdots$ (×)

(ㅁ) 모든 유리수는 제곱근이 2 개이다. $\cdots$ (×)

(ㅂ) 양수의 두 제곱근의 합은 0 이다. $\cdots$ (×)

[배점 4, 중중]

① ㄱ, ㄹ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄴ, ㅂ
④ ㄷ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㅁ

해설

(ㄱ) 0 의 제곱근은 0 이다.
(ㄴ), (ㄹ) 음수의 제곱근은 존재하지 않는다.
(ㄷ) 양수 a 의 제곱근은 $\sqrt{a}$ 와 $-\sqrt{a}$
(ㅁ) 음의 유리수는 제곱근이 존재하지 않고 0 의 제곱근은 0 이다.

8. $\sqrt{a}=5.235$, $\sqrt{b}=5.666$ 일 때, $b-a$ 의 값은?

수	0	1	2	3	4	5
25	5.000	5.010	5.020	5.030	5.040	5.050
26	5.099	5.109	5.119	5.128	5.138	5.148
27	5.196	5.206	5.215	5.225	5.235	5.244
28	5.292	5.301	5.310	5.320	5.329	5.339
29	5.385	5.394	5.404	5.413	5.422	5.431
30	5.477	5.486	5.495	5.505	5.514	5.523
31	5.568	5.577	5.586	5.595	5.604	5.612
32	5.657	5.666	5.675	5.683	5.692	5.701
33	5.745	5.753	5.762	5.771	5.779	5.788
34	5.831	5.840	5.848	5.857	5.865	5.874

[배점 4, 중중]

① 5.6 ② 5.2 ③ 4.7 ④ 4.1 ⑤ 3.4

해설

$a=27.4$, $b=32.1$
$\therefore\ b-a=32.1-27.4=4.7$

9. $2\times\sqrt{3}\times\sqrt{a}=3\times\sqrt{6}$ 를 만족하는 양의 유리수 a 의 값은? [배점 4, 중중]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

해설

좌변 $=\sqrt{4\times3\times a}$, 우변 $=\sqrt{9\times6}=\sqrt{54}$,
$4\times3\times a=54$
$\therefore a=\frac{9}{2}$

10. $\sqrt{2}\fallingdotseq1.414$, $\sqrt{20}\fallingdotseq4.472$ 일 때, $\sqrt{\frac{1}{5}}$ 의 근삿값을 구하면? [배점 4, 중중]

① 0.4472 ② 0.1414 ③ 0.04472
④ 0.01414 ⑤ 0.3058

해설

$\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{10}=\frac{\sqrt{20}}{10}\fallingdotseq0.4472$

11. 다음 보기의 수를 각각 제곱근으로 나타낼 때, 근호를 사용하지 않아도 되는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $\sqrt{36}$ ㉡ 25
㉢ $\sqrt{(-3)^2}$ ㉣ 1.6
㉤ $\frac{49}{9}$ ㉥ $\frac{81}{6}$

[배점 5, 중상]

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉣ ③ ㉡, ㉤
④ ㉠, ㉢, ㉤ ⑤ ㉡, ㉣, ㉥

해설

㉠ $\sqrt{36}=6$ 이므로 6 의 제곱근은 $\pm\sqrt{6}$이다.
㉢ $\sqrt{(-3)^2}=3$ 이므로 3 의 제곱근은 $\pm\sqrt{3}$이다.
㉣ (1.6 의 제곱근) $=\pm\sqrt{1.6}$ (1.6 은 제곱수가 아니다.)
㉥ ($\frac{81}{6}$ 의 제곱근) $=\pm\frac{9}{\sqrt{6}}$

12. 두 실수 a, b 에 대하여 $a-b<0$, $ab<0$ 일 때, $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}-\sqrt{(-a)^2}+\sqrt{(-b)^2}$ 을 간단히 한 것은?

[배점 5, 중상]

① 0 ② $2a$ ③ $a-b$
④ $2b$ ⑤ $a+b$

해설

$ab<0$ 이면 a와 b의 부호가 다르다.
$a-b<0$ 이면 $a<b$ 이므로 $a<0$, $b>0$ 이다.
$a<0$ 이므로 $\sqrt{a^2}=-a$, $b>0$ 이므로 $\sqrt{b^2}=b$
$a<0$ 이므로 $\sqrt{(-a)^2}=\sqrt{a^2}=-a$
$b>0$ 이므로 $\sqrt{(-b)^2}=\sqrt{b^2}=b$
따라서
$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}-\sqrt{(-a)^2}+\sqrt{(-b)^2}$
$=-a+b-(-a)+b$
$=2b$

13. 한 변의 길이가 a 이고 높이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 인 정삼각형과 그 둘레의 길이가 같은 정사각형이 있다면, 이 정사각형의 넓이는 정삼각형 넓이의 몇 배인가 ?

[배점 5, 중상]

① 1 배 ② 2 배 ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 배
④ $3\sqrt{3}$ 배 ⑤ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 배

해설

정삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{3}{4}a$ 이므로 정사각형의 넓이는 $\frac{9}{16}a^2$

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\square=\frac{9}{16}a^2$

$\therefore\ \square=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (배)

14. $\sqrt{ab}=3$ 일 때, $\sqrt{ab}-\frac{5a\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{2b\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 의 값을 구하여라. (단, $a>0$, $b>0$)

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

-6

해설

$\sqrt{ab}-5\sqrt{ab}+2\sqrt{ab}=3-5\times3+2\times3=-6$

15. 다음의 표는 제곱근표의 일부이다. 이 표를 이용하여 $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}-\frac{9}{\sqrt{3}})$ 의 값을 구하면?

수	0	1	2
1	1.000	1.005	1.010
2	1.414	1.418	1.421
3	1.732	1.735	1.738
4	2	2.002	2.005
5	2.236	2.238	2.241
6	2.449	2.452	2.454
7	2.646	2.648	2.650
8	2.828	2.830	2.832

[배점 5, 중상]

① 1.414 ② −1.732 ③ 1.732

④ −2.449 ⑤ 2.449

해설

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=-\sqrt{6}=-2.449$

16. 다음 계산 중 옳은 것은? [배점 5, 중상]

① $\frac{6}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\frac{\sqrt{8}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=8+3\sqrt{2}$

② $\sqrt{32}-2\sqrt{24}-\sqrt{2}(1+2\sqrt{3})=3\sqrt{2}-2\sqrt{6}$

③ $(\sqrt{63}-\sqrt{35})\div\sqrt{7}=2-\sqrt{5}$

④ $\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\sqrt{3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{5\sqrt{6}}{6}$

⑤ $\frac{12+3\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

해설

① $\frac{6}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\frac{\sqrt{8}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3}+\frac{4-2\sqrt{6}}{2}=2\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{6})=8-3\sqrt{6}$

② $\sqrt{32}-2\sqrt{24}-\sqrt{2}(1+2\sqrt{3})=4\sqrt{2}-4\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{6}=3\sqrt{2}-6\sqrt{6}$

③ $(\sqrt{63}-\sqrt{35})\div\sqrt{7}=\frac{\sqrt{63}-\sqrt{35}}{\sqrt{7}}=\sqrt{9}-\sqrt{5}=3-\sqrt{5}$

④ $\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\sqrt{3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}\times2\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2}+1\right)+\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}-1\right)=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)+(1-1)=\frac{7\sqrt{6}}{6}$

⑤ $\frac{12+3\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(12+3\sqrt{6})}{3}=\frac{12\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

17. 자연수 n 에 대하여 $\sqrt{n}$ 의 소수 부분을 $f(n)$이라 할 때, $f(80)+f(45)=a\sqrt{5}+b$ 이다. 이 때, $2a+b$ 의 값을 구하면? [배점 5, 중상]

① −28 ② −7 ③ 0

④ 7 ⑤ 21

해설

i)$8 < \sqrt{80} = 4\sqrt{5} < 9$ $\therefore f(80) = 4\sqrt{5} - 8$

ii)$6 < \sqrt{45} = 3\sqrt{5} < 7$ $\therefore f(45) = 3\sqrt{5} - 6$

$f(80)+f(45) = 4\sqrt{5}-8+3\sqrt{5}-6 = 7\sqrt{5}-14 = a\sqrt{5}+b$

$a = 7, b = -14$

$\therefore 2a + b = 14 + (-14) = 0$

18. 유리수 a 와 무리수 b 가 $a > 0$, $b > 0$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? [배점 5, 상하]

① $b\sqrt{a}$ 는 항상 무리수이다.

② $\dfrac{b}{\sqrt{a}}$ 는 항상 유리수이다.

③ $b - a$ 는 항상 무리수이다.

④ ab 는 항상 무리수이다.

⑤ $b - \sqrt{a}$ 는 유리수일 수도 있고, 무리수일 수도 있다.

해설

$a = 2$, $b = \sqrt{2}$ 라 하면

① $b\sqrt{a} = 2$ 유리수이지만 $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ 일 때는 무리수

② $\dfrac{b}{\sqrt{a}} = 1$ 유리수이지만 $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ 일 때는 무리수

③ $b - a = \sqrt{2} - 2$ 항상 무리수

④ $ab = 2\sqrt{2}$ 항상 무리수

⑤ $b - \sqrt{a} = 0$ 유리수이지만 $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ 일 때는 무리수

따라서 옳은 것은 ④, ⑤이다.

19. 넓이가 7π 인 원을 지면에 수직으로 세워서 네 바퀴 돌렸을 때, 지면과 접하고 있던 원 위의 한 점 A가 다시 지면과 접하고 있었다. 이때 점 A는 원래의 위치에서 얼마나 떨어져 있는지 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

$8\sqrt{7}\pi$

해설

넓이가 7π 이므로 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$\pi r^2 = 7\pi$ $r = \sqrt{7}$

이때, 원을 네 바퀴 굴렸으므로

(원 위의 한 점 A가 원래의 위치로부터 떨어진 거리)

$= $ (원의 둘레의 길이) $\times 4$

$= 2\pi \times \sqrt{7} \times 4$

$= 8\sqrt{7}\pi$

20. $\dfrac{5 - 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$ 일 때, 유리수 a, b 에 대하여 ab 의 값은? [배점 5, 상하]

① -5 ② -4 ③ -1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\frac{5 - 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{(5 - 3\sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3} - 9}{3} = -3 + \frac{5\sqrt{3}}{3} = a + b\sqrt{3}$$

$\therefore a = -3$, $b = \dfrac{5}{3}$

$\therefore ab = -5$

21. 정사각형 A, B, C가 있다. A의 넓이는 s 이고, A의 넓이는 B의 2배, B의 넓이는 C의 3배일 때, C의 넓이를 s를 사용한 식으로 나타내어라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

$\frac{s}{6}$

해설

$(\text{B의 넓이}) = \frac{1}{2} \times (\text{A의 넓이}) = \frac{1}{2}\text{s}$

$(\text{C의 넓이}) = \frac{1}{3} \times (\text{B의 넓이}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\text{s} = \frac{1}{6}\text{s}$

따라서 C의 넓이는 $\frac{s}{6}$이다.

22. 상수 $a = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2} + 1$에 대하여, 유리수 x, y가 $ax + by = 2a + b$를 만족할 때, $x + y$의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

3

해설

주어진 식에 a, b를 각각 대입하면

$(\sqrt{3}-\sqrt{2})x+(2\sqrt{2}+1)y = 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+2\sqrt{2}+1$

양변을 $\sqrt{3}$ 항과 $\sqrt{2}$ 항으로 각각 정리하면

$x\sqrt{3} + (2y - x)\sqrt{2} + y = 2\sqrt{3} + 1$

$\therefore\ x = 2,\ y = 1$

$\therefore\ x + y = 3$

23. $x = \sqrt{3 - \sqrt{3 - \sqrt{3 - \cdots}}}$ 일 때, $x^2 + x + 1$의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

4

해설

$x = \sqrt{3 - \sqrt{3 - \sqrt{3 - \cdots}}}$에서

$\sqrt{3 - \sqrt{3 - \sqrt{3 - \cdots}}} = \sqrt{3 - x} = x$ 이므로

$3 - x = x^2$, $x^2 + x = 3$

$\therefore x^2 + x + 1 = 4$

24. 집합 $A = \{\sqrt{n} | n\text{은 자연수}\}$의 서로 다른 세 원소를 각각 가로의 길이, 세로의 길이, 높이로 하는 직육면체의 부피가 $6\sqrt{5}$일 때, 이 직육면체의 겉넓이의 최댓값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

722

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$라 하면

부피는 $\sqrt{abc} = 6\sqrt{5} = \sqrt{180}$

$\therefore\ abc = 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

한편 직육면체의 겉넓이는

$2(ab + bc + ca)$이고

$ab+bc+ca$가 최댓값을 갖기 위한 자연수 a, b, c의 순서쌍은 $(1,\ 1,\ 180)$ 이므로

$\therefore$ 직육면체의 겉넓이 $= 2(ab + bc + ca) = 722$

25. 서로소인 두 자연수 $m,\ n$ 에 대하여 $\left[10\sqrt{\dfrac{n}{m}}\right] = 20$, $\sqrt{(m-n)^2} = 100$ 일 때, $m+n$ 의 값이 될 수 있는 수를 모두 구하여라. (단, $[a]$는 a보다 크지 않은 최대의 정수) [배점 6, 상중]

▶ 답:

▶ 답:

162

166

해설

$\left[10\sqrt{\dfrac{n}{m}}\right] = 20$ 에서 $20 \le 10\sqrt{\dfrac{n}{m}} < 21$, $2 \le \sqrt{\dfrac{n}{m}} < 2.1$

$\therefore\ 4 \le \dfrac{n}{m} < 4.41 \cdots$ ㉠

이때, $\dfrac{n}{m} > 1$ 이므로 $n > m$

$\sqrt{(m-n)^2} = 100$, $n - m = 100$

$\therefore\ n = m + 100 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $4 \le \dfrac{m+100}{m} < 4.41$

$4 \le 1 + \dfrac{100}{m} < 4.41$, $3 \le \dfrac{100}{m} < 3.41$

$3m \le 100 < 3.41m$

$3m \le 100$ 에서 $m \le 33.3...\ \cdots$ ㉢

$100 < 3.41m$ 에서 $m > 29.3...\ \cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 $29.3 \times \times\times < m \le 33.3 \times \times\times$

$\therefore\ m = 30,\ 31,\ 32,\ 33$

이때 각각의 m 에 대한 n 의 값은

$n = 130,\ 131,\ 132,\ 133$ 이다.

그런데 $m,\ n$ 은 서로소이므로

$(m,\ n) = (31,\ 131),\ (33,\ 133)$ 이므로

$m + n = 162$, 또는 166 이다.